PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 7. 1. April 1921. Redaktionsschluß für No. 9 am 10. April 1921. 22. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

J. Koenigsberger u. A. Rüttenauer, Über negative Kanalstrahlen und die Umladung im Gasgemisch. S. 193.

R. Glocker u. M. Kaupp†, Die Berechnung des Absorptionsverlustes der Streustrahlung innerhalb des streuenden Körpers. S. 200.

A. March, Die Röntgen-Bremsstrahlung. S. 209.

S. Fuchs, Zur Theorie des Gleit- und Rollwiderstandes der festen Körper. II. (Rollende Reibung.) S. 213.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

M. Born, Kritische Betrachtungen zur traditionellen Darstellung der Thermodynamik. S. 218.

Besprechungen:

A. Sommerfeld, Atombau upd Spektrallinien. S. 224.

Personalien. S. 224. **Angebote.** S. 224.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über negative Kanalstrahlen und die Umladung im Gasgemisch.

Von J. Koenigsberger und A. Rüttenauer.

§ 1. Theorie der Umladung von neutralen, positiven und negativen Kanalstrahlen in einheitlichen und gemischten Gasen. Gegenüber den Zweifeln, die G. Huch[1]) bezüglich der bisher angewandten Differentialgleichung[2]) für die Umladung der positiven Strahlen zu neutralen und der neutralen zu positiven äußerte, ist für die üblichen Laboratoriumsanordnungen im Beobachtungsraum der Kanalstrahlen folgendes zu bemerken. Die Umladungsweglängen λ_p und λ_a haben sich für verschiedene Umladungswegstrecken (A. Rüttenauer[3]) 21 cm und 12,5 cm und J. Koenigsberger und J. Kutschewski 14 cm) übereinstimmend ergeben. Das spricht für die Richtigkeit der e-Funktion. Ferner waren trotz sehr stark wechselnder Intensität der Kanalstrahlen, die im Verhältnis 1 : 300 variierte, die berechneten Werte von λ_p und λ_a stets innerhalb der Fehlergrenzen die gleichen. Also kann die Ionisierung durch die Kanalstrahlen selbst für die Umladung meist nicht von großer Bedeutung sein. Daher darf der früher verwandte Ansatz zugrunde gelegt und erweitert werden.

Es sei p die Anzahl der positiven, m die Anzahl der negativen und a die Anzahl der neutralen Strahlen. Es sei ferner die Umladungsfunktion für p in $a = f_1$, für m in $p = f_2$, für a in $p = f_3$, für a in $m = f_4$, p in $m = f_5$ und m in $a = f_6$. Nach den folgenden Versuchen und früheren des einen von uns[4]) ergab sich, daß innerhalb der Versuchsfehler eine direkte Umladung von p in m und von m in p nicht stattfindet. Es ist für die Strecke dx die Zahl der neugebildeten negativen Strahlen dm daher nur proportional der Anzahl der neutralen und f_2 sowie f_5 sind $= 0$. Aus den negativen Strahlen werden sich zunächst nur neutrale bilden. Es ist also

$$1.\quad \frac{dm}{dx} + m f_6 - a f_4 = 0. \qquad \text{Analog ist:} \qquad 2.\quad \frac{dp}{dx} + p f_1 - a f_3 = 0. \qquad 3.\quad \frac{da}{dx} + a (f_3 + f_4) - p f_1 - m f_6 = 0.$$

Wir haben hier also drei simultane Differentialgleichungen, deren Integrale in bekannter Weise erhalten werden. Es sei dann $f_1 + f_3 + f_4 + f_6 = P$ und $f_1 f_4 + f_1 f_6 + f_3 f_6 = D$ gesetzt.

Dann wird $p = c_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_3$. In analoger Weise ergibt sich $a = c_4 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_5 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_6$,

$$m = c_7 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_8 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_9,$$

wobei c_1, c_2 bis c_9 noch zu bestimmende Konstanten sind. Durch Einsetzen in die ursprünglichen Differentialgleichungen ergibt sich, daß 6 von den Konstanten nicht willkürlich sind, sondern in folgender Weise miteinander verknüpft werden können: $c_4 = c_1 u_1$, $c_5 = c_2 u_2$, $c_6 = c_3 u_3$, $c_7 = c_1 v_1$, $c_8 = c_2 v_2$ und $c_9 = c_3 v_3$. Die Konstanten u_1, u_2, u_3 sind dabei die Wurzeln folgender kubischer Gleichung: $u^3 f_3^2 + u^2 f_3 (f_3 + f_4 + f_6 - 2 f_1) + u (f_1^2 + f_3 f_6 - f_1 f_6 - f_1 f_4 - 2 f_1 f_3) + f_1 (f_1 - f_6) = 0$.

Die Wurzeln dieser Gleichung sind, wenn

1) G. Huch, Ann. d. Phys. **58**, 201, 1919.

2) W. Wien, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 27. Juli 1911, S. 773—786; J. Koenigsberger und J. Kutschewski, Verh. Frbg. Natur. Ges., Juli 1911.

3) A. Rüttenauer, Zeitschr. f. Phys. **1**, 385, 1920 und ebenda S. 267, 1921.

4) J. Koenigsberger und J. Kutschewski, Verh. d. D. Phys. Ges. **14**, 1, 1912.

$$M_1 = \frac{f_3 + f_4 + f_6 - f_1}{2 f_3},$$

$$M_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{f_3 + f_4 + f_6 - f_1}{f_3}\right)^2 - \frac{f_6 - f_1}{f_3} \text{ gesetzt wird,}$$

$$u_1 = -M_1 - \sqrt{M_2}, \qquad u_2 = -M_1 + \sqrt{M_2},$$

$$u_3 = \frac{f_1}{f_3}.$$

Die Konstanten v_1, v_2, v_3 sind die Wurzeln folgender kubischen Gleichung: $v^3 f^2_3 f_6 + v^2 (f^2_3 f_6 - f_3 f^2_6 + f_1 f_3 f_6 - f_1 f_3 f_4 - f_3 f_4 f_6) + v (f_1 f_4{}^2 - f_1{}^2 f_4 + f_1 f_4 f_6 - f_1 f_3 f_4 - f_3 f_4 f_6) + f_1 f_4{}^2 = 0$. Es ergibt sich hieraus, wenn $N_1 = \frac{f_1 + f_3 - f_4 - f_6}{2 f_3}$, $N_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{f_1 + f_3 - f_4 - f_6}{f_3}\right)^2 + \frac{f_4}{f_3}$ gesetzt wird, $v_1 = -N_1 + \sqrt{N_2} = -u_1 - 1$, $v_2 = -N_1 - \sqrt{N_2} = -u_2 - 1$, $v_3 = \frac{f_1 f_4}{f_6 f_3}$. Die Konstanten c_1, c_2 und c_3 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Es ist für $x = 0$, $p = 0$, $a = 0$, $m = m_0$. Also ist $c_1 + c_2 + c_3 = 0$; $c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0$; $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = m_0$.

Da $M_2 = N_2 = \frac{1}{f_3}\sqrt{\frac{P^2}{4} - D}$ ist, ergibt sich

$$c_1 = \frac{m_0\left(\frac{f_1}{f_3} + M_1 - \sqrt{M_2}\right)}{2\sqrt{M_2}\left(\frac{f_1 f_4 + f_1 f_6 + f_6 f_3}{f_6 f_3}\right)},$$

$$c_2 = \frac{-m_0\left(\frac{f_1}{f_3} + M_1 + \sqrt{M_2}\right)}{2\sqrt{M_2}\left(\frac{f_1 f_4 + f_1 f_6 + f_6 f_3}{f_6 f_3}\right)},$$

$$c_3 = \frac{m_0 f_6 f_3}{f_1 f_4 + f_1 f_6 + f_6 f_3}.$$

Durch Einsetzen der gefundenen Werte von p und a in die ursprüngliche Differentialgleichung $\frac{dp}{dx} + p f_1 - a f_3 = 0$ wurde die richtige Zuordnung der Konstanten u zu den c gefunden. Die Anfangsbedingung $a + p + m = m_0$ ist dann erfüllt, wenn $1 + u_1 + v_1 = 1 + u_2 + v_2 = 0$ ist, ferner wenn $c_3(1 + u_3 + v_3) = m_0$ ist. Die Prüfung dieser Beziehung ergab die Zuordnung der Konstanten v zu den c. Es ist dann

$$p = c_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_6 f_3}{f_1 f_4 + f_1 f_6 + f_6 f_3},$$

$$a = c_1 u_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 u_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_1 f_6}{f_1 f_6 + f_1 f_4 + f_3 f_6},$$

$$m = c_1 v_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 v_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_1 f_4}{f_1 f_6 + f_1 f_4 + f_6 f_3},$$

wobei c_1, c_2, u_1, u_2, v_1 und v_2 die angegebenen Funktionen der f_1, f_3, f_4, f_6 sind. Es wird

$$\frac{m}{a} = \frac{c_1 v_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 v_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_1 f_4}{f_1 f_6 + f_1 f_4 + f_6 f_3}}{c_1 u_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 u_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_1 f_6}{f_1 f_6 + f_1 f_4 + f_6 f_3}}. \tag{4}$$

Da f_1 und f_3 aus den Umladungsmessungen der positiven Strahlen angenähert bekannt sind, ferner $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = \frac{f_3}{f_1} = w$ und $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = w_m$ gemessen wurde, $w_m = \frac{f_4}{f_6}$, also $f_4 = w_m f_6$ ist, läßt sich zunächst f_6 und somit auch f_4 aus der obigen transzendenten Gleichung (4) mittelst graphischer Berechnung ermitteln.

Da $f_3 = f_1 \cdot w$ ist und $\frac{p}{a}$ experimentell gegeben ist, so lassen sich aus der Gleichung

$$\frac{p}{a} = \frac{c_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_3 f_6}{f_1 f_6 + f_1 f_4 + f_6 f_3}}{c_1 u_1 e^{\left(-\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + c_2 u_2 e^{\left(-\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - D}\right)x} + \frac{m_0 f_1 f_6}{f_1 f_6 + f_1 f_4 + f_6 f_3}}$$

auch die Funktionen f_1 und f_3 mit den wie oben angegeben berechneten Größen f_4 und f_6 jetzt genauer berechnen. Man kann dann in bekannter Weise im Näherungverfahren darauf f_4 und f_6 nochmals berechnen. Es zeigte sich aber, daß dies unnötig war, da die genauer berechneten f_1 und f_3 von den zuerst angenommenen sich in Anbetracht der Versuchsfehler wenig unterschieden.

Für die Rechnung wird zweckmäßig folgende

Form angewandt, worin $+\left(\frac{f_1}{f_3}+M_1-\sqrt{M_2}\right)=$ $=c_1'=-u_2+\frac{f_1}{f_3}$; $-\left(\frac{f_1}{f_3}+M_1+\sqrt{M_2}\right)=$ $=c_2'=+u_1-\frac{f_1}{f_3}$; die Exponenten von $e=a_1\cdot x$ und $a_2\cdot x$ gesetzt sind; $\frac{1}{2\sqrt{M_2}}=b$

$$\frac{m}{a}=\frac{b\,(c_1'v_1e^{a_1x}+c_2'v_2e^{a_2x})+\frac{1}{w\cdot w_m}}{b\,(c_1'u_1e^{a_1x}+c_2'u_2e^{a_2x})+\frac{1}{w}}$$

und

$$\frac{p}{a}=\frac{b\,(c_1'e^{a_1x}+c_2'e^{a_2x})+1}{b\,(c_1'u_1e^{a_1x}+c_2'u_2e^{a_2x})+\frac{1}{w}}.$$

Geht man statt von m_0 von p_0 aus, wie das bei einigen der folgenden Versuche geschehen, bei denen $\frac{p+m}{a}$ ermittelt wurde, so werden die Konstanten $c_1=\frac{f_1}{f_3}p_0\,(A+B)F$, $c_2=$ $=\frac{f_1p_0}{f_3\,2\sqrt{M_2}}(B-A)F$ und $c_3=p_0F$, worin $A=N_1-M_1\frac{f_1}{f_6}$; $B=\sqrt{N_2}\left(1+\frac{f_1}{f_6}\right)$; $F=$ $=\frac{f_3f_6}{f_3f_6+f_1f_6+f_1f_4}$. Dies gibt

$$\frac{p}{a}=\frac{b'\,[(A+B)\,e^{a_1x}+(B-A)\,e^{a_2x}]+1}{b'\,[(A+B)\,u_1e^{a_1x}+(B-A)\,u_2e^{a_2x}]+\frac{1}{w}},$$

wobei $b'=\frac{1}{2w\sqrt{M_2}}$. Es ist ferner

$$\frac{p+m}{a}=\frac{-c'+\frac{w_m}{w}+1}{c'+\frac{1}{w}},$$

worin $c'=b'\,[(A+B)\,u_1e^{a_1x}+(B-A)\,u_2e^{a_2x}]$.

Man sieht leicht, daß in einem Gasgemisch die ursprünglichen Differentialgleichungen auch gelten. Nur treten an Stelle von f_1, jetzt $f_1'+$ $+f_1''+f_1'''+\ldots$ analog f_2 ist $f_2'+f_2''+f_2'''+\ldots$ usw. Hierin ist f_1' die Umladungsfunktion von p in a in einem Gas, dessen Partialdruck mit s' bezeichnet wird, f_1'' gilt für das zweite Gas mit Partialdruck s'' usf. Voraussetzung ist die anfangs erwähnte Annahme, die darauf hinausläuft, daß für die Umladung des Strahles nur der Zusammenstoß mit dem unveränderten ruhenden Gasmolekül entscheidend ist, daß also einfache Summation des Vorgangs gilt. In diesem Fall muß aber $f=\frac{1}{\lambda}$ dem Druck s proportional sein, also $=\varphi\cdot s$ gesetzt werden können. Daher ist an Stelle von f_1 im einfachen Gas $=\varphi_1 s$ oder im gemischten Gas $\varphi_1's'+\varphi_1''s''+\varphi_1'''s'''+\ldots$ usw. zu setzen. Im folgenden besteht das untersuchte Gasgemisch aus Quecksilberdampf und Wasserstoff. Eine kleine Vereinfachung tritt dadurch ein, daß negative H-Strahlen nur durch Zusammenstoß neutraler H-Atome mit ruhenden Hg-Gasatomen nicht mit H_2-Molekülen gebildet werden, also $\varphi_1''=0$.

Man sieht leicht, daß dann z. B. $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty=w_m=\frac{\varphi_1's'}{\varphi_6's'+\varphi_6''s''}$ und $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty=w=$ $=\frac{\varphi_3's'+\varphi_3''s''}{\varphi_1's'+\varphi_1''s''}$ sind. $\frac{1}{\lambda}$ wird in seiner Abhängigkeit von den beiden Partialdrucken durch eine Ebene, und wenn ein Partialdruck, z. B. s konstant ist, durch eine Gerade dargestellt, deren Schnittpunkt mit der einen Koordinatenachse durch s bestimmt wird. Die Abweichungen der anderwärts[1]) angegebenen Druckkurven von der Geraden sind also nicht etwa durch Verunreinigung des H_2 zu erklären.

§ 2. Bildung und Gleichgewichtszustand negativer H- und O-Strahlen. Nach Versuchen von W. Wien[2]) ist Quecksilberdampf die Ursache der Bildung negativer O-Kanalstrahlen. Bei Sauerstoffstrahlen findet W. Wien unter geeigneten Bedingungen einen Überschuß von negativen Strahlen über die positiven. Bei Wasserstoff ist niemals ein Überschuß negativer Strahlen da. W. Wien[3]) sagt ferner: „Auch durch Wasserstoff werden negative Ionen gebildet".

T. Retschinsky[4]) fand eine Verstärkung der negativen O-Kanalstrahlen durch Anwesenheit von Hg-Dampf. J. Koenigsberger und J. Kutschewski[5]) fanden, daß die negativen Strahlen hauptsächlich durch Anwesenheit von Wasserdampf sowohl im Beobachtungsraum wie im Entladungsraum entstehen.

Die folgenden Beobachtungen erstrecken sich zuerst auf die wiederholte Vergleichung des Fluoreszenzfleckes der negativen Strahlen unter verschiedenen Bedingungen. Ein schwaches Auftreten von negativen H-Kanalstrahlen erfolgte bei guter Kohlensäurekühlung, wenn schlecht oder gar nicht getrockneter Wasserstoff durchströmte, ferner sobald der Wasserdampf

1) Vgl. Zeitschr. f. Phys. **4**, 267, 1921.
2) W. Wien, diese Zeitschr. **11**, 377, 1910.
3) E. Marx, Handb. d. Radiologie, Bd. IV; W. Wien, Kanalstrahlen, S. 104.
4) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. **47**, 525, 1915.
5) J. Koenigsberger und J. Kutschewski, Ann. d. Phys. **37**, 162, 1912.

H-Strahl.

Potential in *v*	$s'(Hg)\cdot 10+3$	$s''(H_2)\cdot 10+3$	$(m:p)_{x=\infty}$	$(p+m:a)_{x=\infty}$
17500	1,19	4,8	0,395	—
23500	1,19	2,4	0,36	0,25
26000	1,19	3,9	0,31	—
28500	1,19	3,9	0,29	0,29
31500	1,19	3,0	0,24	0,345
28500	0,184	2,4	0,16	0,44
31500	0,184	3,0	0,125	0,495
28500	0,0216	3,0	0,035	0,62
31500	0,0216	3,5	0,030	0,66

im Entladungs- und Beobachtungsraum durch Gebrauch von sehr stark hydratisiertem Phosphorpentoxyd nicht mehr genügend beseitigt wurde. Durchleiten von gut getrocknetem Wasserstoff und Erneuern des Phosphorpentoxyds bewirkte ein allmähliches Schwächerwerden der negativen *H*-Strahlen und schließlich fast völliges Verschwinden des negativen Fluoreszenzfleckes. Ein geringes Auftreten der negativen *H*-Strahlen wird also durch Wasserdampf bewirkt. Daß der Wasserdampf hierbei als ruhendes Gas wirkt, ist früher[1]) gezeigt worden. Ein sehr starkes Auftreten der negativen *H*-Strahlen wurde beobachtet ohne Kohlensäurekühlung, gleichgültig, ob *H* gut oder schlecht getrocknet war. Das starke Auftreten der negativen *H*-Strahlen bei Abwesenheit von H_2O-Dampf muß also durch die Anwesenheit von *Hg*-Dampf verursacht sein. Auch in dem durch ein elektrisches und magnetisches Feld getrennten und abgelenkten positiven *H*-Strahl findet nachträglich im Beobachtungsraum bei Anwesenheit von *Hg*-Dampf Bildung negativer *H*-Strahlen statt. Auf der Parabel der negativen *H*-Strahlen, die sich infolge verschiedener Geschwindigkeit bei der elektromagnetischen Trennung auf dem Schirm abbildet, konnte man daher deutlich zwei getrennte Flecke sehen, die der Geschwindigkeit der Kurven *a* und *b*, die T. Retschinsky beim positiven *H*-Strahl beobachtete, entsprechen. Der Einfluß des *Hg*-Dampfes[2]) auf die Bildung der negativen Sauerstoff- und Wasserstoffstrahlen wurde genauer untersucht. Die Messungen hierüber erfolgten in H_2-Durchströmung bei verschiedenen *Hg*-Drucken, in der Weise, daß zuerst der durch ein erstes elektrisches und ein magnetisches Feld abgelenkte und getrennte positive *H*- bzw. *O*-Strahl, sodann durch Kommutieren dieser beiden Felder der negative *H*- bzw. *O*-Strahl auf ein hoch empfindliches Thermoelement, das mit einem Paschen-Galvanometer verbunden war, fiel. Es wurde also das Verhältnis der negativen zu den positiven Strahlen gemessen, so wie es sich im Kanalstrahl nach Durchgang durch die Kathode und eine Eisenkapillare von 2,5 cm Länge auf einer Wegstrecke von 4,4 cm eingestellt hat, und das auch dem Gleichgewichtszustand im Gasgut entspricht.

In den Tabellen sind die Beobachtungen enthalten. Es ist daraus zu ersehen, daß bei einem größeren Partialdruck des *Hg*-Dampfes[1]) das Verhältnis der negativen zu den positiven Strahlen größer wird, also eine stärkere Bildung der negativen Strahlen eintritt, was auch aus den Beobachtungen W. Wiens an *O*-Kanalstrahlen abzuleiten ist. Bei größeren Potentialen wird das Verhältnis der negativen zu den positiven kleiner. Der Einfluß des *Hg*-Dampfes auf die *H*- und *O*-Strahlen ist qualitativ etwa der gleiche.

Der große Einfluß kleiner Mengen von *Hg*-Dampf auf den Endzustand der Umladung ermöglicht, da er, wie im folgenden gezeigt, den beiden Partialdrucken proportional ist, die Druckmessung von *Hg*.

§ 3. Umladung der *H*- und *O*-Strahlen. Bei der Messung der Umladung der negativen Strahlen fiel der durch ein erstes elektrisches und ein magnetisches Feld abgelenkte und getrennte *O*- bzw. *H*-Strahl, der sich in seinem weiteren Verlaufe zu neutralen Atomen assoziiert und zu positiven dissoziiert, auf das Thermo-

1) J. Koenigsberger und J. Kutschewski, Verh. d. D. phys. Ges. **14**, 1, 1912.

2) Bei den früheren Versuchen (1912) war beobachtet worden, daß nach tagelangem Einleiten von ganz trockenem O_2 trotz der Anwesenheit von *Hg*-Dampf von etwa $1{,}6\,0^{-3}$ mm Partialdruck kein negativer Sauerstoff auftrat. Diese Beobachtung steht nicht im Widerspruch mit dem von W. Wien früher (und jetzt von uns) festgestellten Auftreten von starkem negativen *O* bei Anwesenheit von *Hg*-Dampf. Der scheinbare Widerspruch erklärt sich dadurch, daß bei sehr langer Benutzung einer zylindrischen Entladungsröhre, durch die ganz trockener H_2 oder O_2 durchgeleitet wird, schließlich, *H*, H_2 und *O* als positive und damit auch als negative Kanalstrahlatome fast verschwinden. — Für das in dieser Arbeit hier behandelte Problem ist es aber gleichgültig, auf welche Art ein Kanalstrahlion entsteht; es wird nur untersucht, wie ein einmal vorhandener Strahl sich verändert.

1) Bei Eiskühlung beträgt der Druck nach M. Knudsen (Ann. d. Phys. **29**, 193, 1909) für *Hg*-Dampf $= 0{,}184\cdot 10^{-3}$ mm. Bei 20°, wobei ein Seitenrohr mit flüssigem *Hg* etwas höher erhitzt wurde, war $s = 1{,}19\cdot 10^{-3}$, bei Kohlensäureätherkühlung $s = 0{,}0216\cdot 10^{-3}$.

element. Dies ergab $m + p + a$. Durch Ablenkung des positiven und negativen Teils durch ein zweites elektrisches Feld wurde nur der neutral assoziierte Teil a gemessen. Durch Verschiebung des Thermoelements nach oben und unten erhielt man den positiven und negativen Teil je für sich. Der abgelenkte negative Teil bildete bei höheren Drucken und kleineren Geschwindigkeiten keinen einheitlichen runden Fluoreszenzfleck auf dem Thermoelement, sondern einen langgezogenen Streifen, was auf eine rasche Umladung der negativen Strahlen hinweist · in einem elektrischen Feld von einer solchen Ausdehnung, daß sich die positiven noch einheitlich verhalten. Um eine genügend große Intensität an negativen Strahlen zu erhalten, muß die Messung unter den günstigsten Bedingungen erfolgen. Wenn auch das Verhältnis der negativen zu den positiven Strahlen mit größer werdendem Partialdruck des Hg-Dampfes größer wird, so wird hierbei doch die Intensität der positiven Strahlen und zwar die am stärksten der leichtesten, also der H-Strahlen, geschwächt und entsprechend die der negativen. Bei einem Hg-Druck, wie er bei Eiskühlung[1]) vorhanden ist, erhielt man den absolut größten Betrag an negativen Strahlen. Für die absolute Intensität der negativen H-Strahlen kam noch die Gebrauchsdauer der Entladungsröhre in Betracht. Bei einer neuen Entladungsröhre mit Eiskühlung konnte durch den abgelenkten H-Strahl ein Galvanometerausschlag von 30 bis 40 cm erhalten werden. Die Werte $\left(\frac{m}{a}\right)_{x=\infty} = w_m$ sind nach der Tabelle und aus den für $(p:a)_\infty = w$ von A. Rüttenauer erhaltenen Werten berechnet. Da $\left(\frac{p}{a}\right)_{x=\infty}$ bei höherem Potential E größer wird, $\left(\frac{m}{p}\right)_{x=\infty}$ aber kleiner, so hat $\left(\frac{m}{a}\right)_{x=\infty}$ einen von E fast uuabhängigen Wert.

Bei **28500 Volt** wurde beobachtet von den negativen $m_0 = 1$ ausgehend, s' (Partialdruck von Hg in 10^{-3} mm) $= 0{,}184$ für $x = 12{,}5$ cm Weg, $s'' = 2{,}4$ (Druck von H_2 in 10^{-3} mm). Der Ausschlag in Zentimetern war für $a = 8.5$, für $p = 2{,}0$ und $m = 2{,}0$ und $a = 11{,}0$, $p = 2{,}5$, $m = 2{,}7$, was im Mittel $\frac{m}{a} = 0{,}24$, $\frac{p}{a} = 0{,}23$ ergibt. Hierbei ist nach dem früheren $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = 0{,}060$; $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = 0{,}38$. Für gleiche Geschwindigkeit, gleiches s und x, von $p_0 = 1$ ausgehend, für $s'' = 2{,}2$ ist $\frac{p+m}{a} = 1{,}32$ und für $s'' = 3{,}1$ ist $\frac{p+m}{a} = 0.94$. Berechnet man zunächst $\frac{m}{a}$ angenähert aus der einfachen Umladungsgleichung, so erhält man $\lambda_m = 6{,}9$, während die Berechnung aus den vollständigen Gleichungen des § 1, unter der Annahme $\lambda_p = 10$ gibt $\lambda_m = 6.0$; für $\lambda_p = 15$ ist $\lambda_m = 6{,}2$, für $\lambda_p = 20$ ist $\lambda_m = 6{,}4$. Zur Bestimmung von λ_p sind verwendbar sowohl Messungen von $\frac{p}{a}$ von m_0 aus, wie von $\frac{p+m}{a}$ von p_0 aus. Letztere sind die genaueren Messungen und auch rechnerisch besser brauchbar. Aus ihnen ergibt sich für $s'' = 2{,}2$, $\lambda_p = 18{,}2$ nach den exakten transzendenten Gleichungen des § 1. Nach der angenäherten Gleichung, wenn einfach statt $\frac{p+m}{a}$ nur $\frac{p}{a} = 1{,}32$ gesetzt würde, wäre $\lambda_p = 19{,}2$. Für $s'' = 3{,}1$ ist aus $\frac{p+m}{a}$ berechnet $\lambda_p = 13$. Für $s'' = 2{,}4$ ist danach λ_p etwa 17. Also ist $\lambda_m = 6{,}2$ und $\lambda_{am} = 6{,}2 : 0{,}060 = 104$.

Berechnet man danach $\frac{p}{a}$ von m_0 aus, so ergibt sich berechnet 0,15 statt beobachtet 0,22. Man kann jetzt $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty$[1]) für verschiedene s' und s'' berechnen und mit den in Tabelle § 2 gegebenen Messungen vergleichen und so die Mischungsformel prüfen, wonach $\frac{1}{\lambda_m} = \varphi_6' s' + \varphi_6'' s''$ ist. Wahrscheinlich gilt zwar für die Umladung von negativem Wasserstoffatom an H_2-Molekülen ebensowenig genaue Druckproportionalität wie für positiven H-Strahl; doch ist ein hierdurch verursachter Fehler nicht groß. Für H an Hg ist die Proportionalität, wie die

1) Bei allen Messungen, die nicht mit starker Kühlung unter $-60°$ C vorgenommen werden, sind die Kohlenwasserstoffe fern zu halten. Diese werden vom neu verwandten Ramsaykitte abgegeben. Daher ist es notwendig, die Röhren vorher längere Zeit mit H_2 durchzuspülen. Die Kohlenwasserstoffe verringern alle Weglängen; sie verringern wegen ihrer höheren Dielektrizitätskonstante (vgl. S. 200) auch w gegenüber reinem H_2 und auch $\left(\frac{m}{p}\right)_\infty$ ziemlich stark.

1) In der Tabelle des § 2 ist $\left(\frac{p+m}{a}\right)_\infty = c_1$, ebenso $\left(\frac{m}{p}\right)_\infty = \frac{1}{c_2}$, woraus $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = \frac{c_1}{1+c_2}$ und $\frac{p}{a} = c_1 - \left(\frac{m}{a}\right)_\infty$ sich ergeben.

Beobachtungen des umgekehrten Falles (Hg an H_2) und die Übereinstimmung der folgenden Rechnung mit den Beobachtungen zeigen, nahezu vorhanden. Es ist $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = \frac{\lambda_m}{\lambda_{am}}$ für $s' = 1{,}19$ und $s'' = 3{,}9$ nach Tabelle S. 196 $= 0{,}065$, während $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = 0{,}225$ ist. Da λ_{am} (für $s' = 0{,}184$) $= 104$ cm $= \varphi_1' \cdot s'$, so ist $\varphi_1' = 0{,}052$. Also ist $\frac{1}{\lambda_{am}} = f_1'$ für $s' = 1{,}19$ gleich $0{,}061$. Da $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = 0{,}065$, so ist $\frac{1}{\lambda_m}$ in diesem Fall $= 0{,}94$. Dies gibt: $1{,}19\,\varphi_6' + 3{,}9\,\varphi_6'' = 0{,}94$ und $0{,}184\,\varphi_6' + 2{,}4\,\varphi_6'' = 0{,}162$, woraus $\varphi_6' = 0{,}77$. Die Umladungsfunktion von H in reinem H_2 (φ_6'') ist aber daraus nur sehr ungenau bestimmbar, da ein kleiner Fehler in $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty$ sie stark beeinflußt; sie muß zwischen 0,006 und 0,010 liegen. Der genauere Wert von φ_6'' folgt aus den Beobachtungen für den kleinen Wert $s' = 0{,}0216$, und dem relativ großen $s'' = 3{,}0$ bei CO_2-Kühlung. Hier war $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = 0{,}03 = \frac{\lambda_m}{\lambda_{am}}$. Da $\lambda_{am} = 0{,}052 \cdot 0{,}0216$ ist, ergibt sich $\lambda = 0{,}037$ und $\varphi_6'' = 0{,}007$.

Aus beiden Werten von λ_p für $s'' = 2{,}2$ und $3{,}1$ kann man, da $\varphi_1'' s''$ direkt aus den Beobachtungen (S. 195, Anm. 1) in H_2 zu entnehmen sind ($s'' = 2{,}2$; $\varphi_1'' s'' = 0{,}0275$ und $s'' = 3{,}1$; $\varphi_1'' s'' = 0{,}033$) berechnen und findet φ_1' im Mittel 0,19. Würde man annehmen, daß die beobachteten Werte bei niederen Drucken in reinem H_2 durch Fehler verfälscht sind und strenge Druckproportionalität gälte, so würden $\varphi_1'' s'' = 0{,}016$ bzw. $0{,}023$, woraus $\varphi_1' = 0{,}27$. Zwischen den Grenzen 0,19 und 0,27 ist φ_1' jedenfalls eingeschlossen. Außerdem ist λ_{ap} gegeben $= 17 : 0{,}38 = 45$ cm bei $s' = 0{,}184$ und $s'' = 2{,}4$. Danach ist $\frac{1}{\lambda_{ap}} = 0{,}0223 = \varphi_3' \cdot 0{,}184 + \varphi_1'' s''$. Je nachdem Druckproportionalität in H_2 angenommen wird, oder die direkt beobachteten Werte zugrunde gelegt werden, erhält man 0,060 oder 0,027 für φ_3'. Die Beobachtungen geben noch einen Wert von $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = 0{,}23$ bei $s' = 1{,}184$ und $s'' = 3{,}9$. Rechnet man mit den Werten von φ_3' und φ_1' und den entsprechenden Werten von $\varphi_1'' s''$ und $\varphi_3'' s''$ im Fall der Druckproportionalität, so erhält man $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = 0{,}25$. Legt man die beobachteten Werte in H_2 für $\varphi_1'' s''$ und $\varphi_3'' s''$ zugrunde, so erhält man 0,21. Der beobachtete Wert von $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty$ liegt zwischen diesen. Diese Übereinstimmung zeigt, daß wenn auch die Frage beziehentlich exakter Druckproportionalität in reinem H_2 noch nicht beantwortet werden kann, für Hg von $0{,}02 \cdot 10^{-3}$ bis zu $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ mm hinauf jedenfalls die Umladung dem Druck sehr angenähert proportional ist.

Für 31500 Volt war bei $s' = 0{,}184$ und $s'' = 2{,}8$ der Wert $\frac{m}{a}$ im Mittel 0,28, $\frac{p}{a} = 0{,}22$, $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = 0{,}054$. $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = 0{,}42$. Ferner waren $\frac{p+m}{a} = 1{,}60$ für $s' = 0{,}184$ und $s'' = 1{,}7$ und $\frac{p+m}{a} = 1{,}3$ für $s' = 0{,}184$ und $s'' = 2{,}4$.

Letztere Werte ergeben für $\lambda_p = 21$ bei $s'' = 1{,}7$ und $\lambda_p = 18$ cm für $s'' = 2{,}4$, woraus nach Bildung des Mittels unter Berücksichtigung der Druckproportionalität für $s'' = 2{,}8$, λ_p etwa $= 18$ cm wird. Danach ergibt sich aus $\frac{m}{a} = 0{,}28$, $\lambda_m = 7{,}0$ und $\lambda_{am} = 116$ aus den transzendenten Gleichungen des § 1 und demnach $\varphi_1' = 0{,}047$. Da $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty = 0{,}066$ für $s' = 1{,}19$ und $s'' = 3{,}0$, erhält man φ_6' etwa $= 0{,}70$ und φ_6'' zwischen 0,005 und 0,010. Für den kleinsten Wert $s = 0{,}0216$ und den relativ großen $s'' = 3{,}5$, wobei $\left(\frac{m}{a}\right)_\infty$ etwa 0,03 ist, läßt sich genauer φ_6'' zu etwa 0,070 bestimmen. Analog wie oben ergibt sich aus den λ_p bei Annahme der Druckproportionalität $\varphi_1' = 0{,}19$, aus den beobachteten $\varphi_1'' s''$ dagegen $\varphi_1' = 0{,}14$. Außerdem wurden noch $\frac{p+m}{a} = 0{,}46$ bei $s' = 1{,}19$ und $s'' = 2{,}4$ und bei $s'' = 1{,}7$ ist $\frac{p+m}{a} = 0{,}52$ beobachtet. Aus letzteren ergibt sich bei Annahme der Druckproportionalität in reinem H_2 $\varphi_1' = 0{,}125$, bei Zugrundelegung der beobachteten Werte in reinem H_2 $\varphi_1' = 0{,}115$. Also ist φ_1' jedenfalls zwischen 0,19 und 0,115 eingeschlossen. Es ist noch der Wert von $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = 0{,}28$ bei $s' = 1{,}19$ und $s'' = 3{,}0$ gegeben. Hieraus berechnet sich bei Annahme der Druckproportionalität für die $\varphi_3'' s''$ der Wert $\varphi_3' = 0{,}043$, mit den beobachteten Werten für die $\varphi_3'' s''$ dagegen φ_3 zu 0,022. Danach müßte $\left(\frac{p}{a}\right)_\infty = 0{,}37$ bei $s' = 0{,}184$ und $s'' = 2{,}4$ bei Druckproportionalität in H_2; da-

gegen wäre $\left(\frac{p}{a}\right)$ nach den beobachteten Werten in H_2 für $\varphi_3'' s''^{\infty} = 0{,}43$, während der beobachtete Wert $= 0{,}42$ ist.

§ 4. Die Umladungsfunktionen sind den Weglängen λ bei $1 \cdot 10^{-3}$ mm Hg umgekehrt proportional. Die Umladungsweglängen können aber nie kleiner sein als die Weglängen λ, zwischen zwei Zusammenstößen. Nicht bei jedem Zusammenstoß muß eine Umladung statthaben. Es ist möglich, daß wenn z. B. ein neutrales Kanalstrahlatom mit einem ruhenden Gasmolekül zusammenstößt, nur bei letzterem ein Elektron abgespalten und frei wird, oder daß beim Zusammenstoß das neutrale Kanalstrahlatom sein Elektron verliert, aber gleich wieder eines von einem ruhenden Gasmolekül einfängt und so unverändert neutral bleibt.

Ähnliches gilt für die Umladung des positiven Strahles, der z. B. mit einem Gasmolekül zusammenstoßen und es ionisieren kann, ohne sich selbst zu neutralisieren. Daher ist stets die Umladungsweglänge größer; ihr reziproker Wert φ ist kleiner als der reziproke Wert von λ_s.

Mit zunehmender Geschwindigkeit v erfolgt die Assoziation eines Elektrons an den positiven Strahl erheblich seltener als bei geringerem v. Die Dissoziation des neutralen Strahles nimmt auch, aber weniger stark mit v ab. Daher wächst mit zunehmendem v die positive Differenz der Umladungweglänge gegen λ_s. Also dürfte φ nur kleiner sein als der reziproke Wert der gaskinetischen λ_g bzw. der unter Berücksichtigung der Influenz λ_i berechneten Stoßweglänge des Ions. Für $\frac{1}{\lambda_g}$ gilt nach Boltzmann $\frac{\pi N}{4}\left(s_1 + s_2\right)^2 = \frac{\pi N}{4}\left[s_1^2\left(1 + 2\sqrt{\frac{s_2^2}{s_1^2}}\right) + s_2^2\right]$. Hierin ist $\frac{\pi N}{4}$ bei $1 \cdot 10^{-3}$ mm $Hg = 2{,}83 \cdot 10^{-3}$; s sind die Durchmesser von Strahlatom bzw. ruhendem Gasmolekül. Die in § 3 gegebenen Zahlen in Hg-Dampf [für $\varphi_6' = \frac{1}{\lambda_{at}}$ von $H_- = 0{,}7$ und $\varphi_1' = \frac{1}{\lambda_p}$ von $H_+ = 0{,}2$ und in H_2 $\varphi_6'' = 0{,}007$; $\varphi_1'' = 0{,}0065$] würden unter der üblichen Annahme gleichen gaskinetischen Querschnitts und gleicher elektrischer Influenzwirkung zeigen, daß das negative H-Atom etwas, aber nicht viel leichter umgeladen wird und daher nicht viel instabiler ist als das positive H-Atom. Für eine Aufstellung eines verbesserten H-Moleküls nach der Theorie von Bohr ist beachtenswert, daß H_- relativ stabil, hingegen ein negatives H_2 im Kanalstrahl überhaupt nicht nachgewiesen werden kann. Bei Versuchen, die wir anstellten, könnte negatives H_2 nur zu einem Betrag von höchstens 0,2 Proz. des positiven H_2 vorhanden gewesen sein, während unter denselben Bedingungen O_- etwa 60 Proz. von O_+ und H_- 40 Proz. von H_+ war. Man wird, um H_- eine einigermaßen stabile Konfiguration zu geben, an eine Struktur mit zwei zueinander senkrechten Elektronenkreisen denken, wie sie Landé[1]) für Parhelium annimmt.

Aus weiteren Versuchen[2]) läßt sich entnehmen, daß die Weglänge λ_{at} des neutralen Wasserstoffatoms in H_2 und O_2 sich mit abnehmender Geschwindigkeit für höhere Drucke dem Wert von etwa 35 cm, von λ_p für H_+ dem Wert von etwa 15 cm nähert, und zwar sind die Werte in H_2 kaum von denen in O_2 verschieden.

λ_g bzw. λ_i müssen kleiner sein. Für s^2 von H_2 sei der von Reinganum[3]) angegebene Wert $6{,}3 \cdot 10^{-16}$ angenommen, in $O_2 = 6 \cdot 8 \cdot 10^{-16}$, also kaum davon verschieden. Daher erklärt sich der geringe Unterschied auch in den Umladungsweglängen von H in H_2 und O_2. s^2 für H muß etwa zwischen dem gaskinetischen Wert für Helium: $4 \cdot 10^{-16}$ und dem aus dem Atommodell von Bohr für H berechneten Durchmesser des einquantigen Elektronenkreises $s^2 = 1 \cdot 10^{-16}$ liegen. Mit dem zu hohen Wert $4 \cdot 10^{-16}$ ergibt sich $\frac{1}{\lambda_g} = 3{,}9 \cdot 10^{-2}$, während der beobachtete Wert von φ_3'' bei $3 \cdot 10^{-2}$ liegt; der wahrscheinlich richtige Wert von $s_2^2 = 2 \cdot 10^{-16}$ gibt $3 \cdot 10^{-2}$, ist also gerade so groß wie $\frac{1}{\lambda_{at}}$, während er größer sein müßte. Das beruht z. T. wohl etwas darauf, daß der Radius des neutralen Kanalstrahls H_a im Mittel größer ist als der des einquantigen H-Atoms. Für H_+ berechnet sich mit dem theoretischen Wert des s^2 von Reinganum[3]) nach der Theorie von Langevin, welcher Wert für H_2-Ionen auch für das H-Ion[4]) angenähert gilt, $\frac{1}{\lambda_i} = 1{,}2 \cdot 10^{-1}$, mit dem aus Ionenversuchen in H_2 entnommenen experimentellen Wert von $s^2 = 60 \cdot 10^{-16}$ ist $\frac{1}{\lambda_i} = 2{,}7 \cdot 10^{-1}$. Der an Kanalstrahlen mit kleinem v gefolgerte Grenzwert $\varphi_1'' = 6 \cdot 10^{-2}$

1) A. Landé, diese Zeitschr. **20**, 228, 1919 (vgl. auch J. Franck und O. Reiche, Zeitschr. f. Phys. **1**, 154, 1920.

2) A. Rüttenauer, l. c.

3) M. Reinganum, diese Zeitschr. **12**, 579, 1911.

4) K. T. Compton und S. M. Benade, Phys. Rev. **8**, 451, 1916. Nach der Theorie von Compton wäre allerdings der Wert für ein Elektron, von dem H_+ in seiner Wirkung nicht wesentlich verschieden sein sollte, viel geringer.

st kleiner als der berechnete, wie das die vorhergehenden Überlegungen verlangten.

Für H_--Strahlen in Hg liegen nur Messungen bei zwei größeren Geschwindigkeiten vor (vgl. § 3). Sie zeigen deutlich eine Geschwindigkeitsabhängigkeit, und die Umladung wird, wie die Messungen am H-Strahl in H_2 und O_2 zeigen, durch das Molekulargewicht des ruhenden Gases kaum beeinflußt. Auch für die negativen Kanalstrahlen ist, wie die Zahlen in § 3 zeigen, eine Geschwindigkeitsabhängigkeit da. Daher ist auch in Hg der maximale Grenzwert für $\frac{1}{\lambda_f}$ bei kleinen v etwa 8mal und für $\frac{1}{\lambda_\sigma}$ etwa 6mal so groß zu veranschlagen wie bei 28500 Volt. Demgemäß ist φ_3' etwa $= 0{,}25$ und $\varphi_4' = 0{,}3$, während das theoretische $\frac{1}{\lambda_E} = 1{,}7 \cdot 10^{-1}$ etwas kleiner statt größer ist. Hierbei ist s^2 für Hg aus den Tabellen von Landolt und Börnstein $= 33 \cdot 10^{-16}$ gesetzt worden, s^2 für den H-Strahl $= 4 \cdot 10^{-16}$ (vgl. oben). Auch hier wäre also der derart aus der elementaren Stoßtheorie errechnete Radius des neutralen Kanalstrahlatoms größer als der gaskinetische, z. T. wohl weil ersterer im Mittel höher als einquantig ist. Außergewöhnlich groß sind aber die Werte $\varphi_1' = 0{,}25$ und $\varphi_6' = 0{,}7$ der H_+-Ionen in Hg für 28500 und 31500 Volt. Selbst wenn man den größten experimentell gefundenen Wert für langsame Ionen von $+ H_2$ in H_2, $s^2 = 60$, zugrunde legt, ist $\frac{1}{\lambda_i} = 5{,}6 \cdot 10^{-1}$, erreicht also nicht einmal φ_6' für 28500 Volt. Die Grenzwerte für φ_1' und φ_6' bei kleinen v sind wohl 8mal größer und daher viel größer als die berechneten Werte von $\frac{1}{\lambda_\gamma}$, statt wie die Überlegungen verlangen würden, kleiner. Hieran ändern auch starke Ungenauigkeiten in den Werten von φ_1' und φ_6', die hier für Hg Dampf nur der Größenordnung nach errechnet sind, nichts. Es bleibt kaum eine andere Erklärung, als im metallischen Charakter, in der verstärkten Influenzwirkung des Hg-Atoms auf die Ionen, die Ursache der außergewöhnlichen Vergrößerung der φ-Werte zu erblicken. Zwar macht sich eine metallische Leitung bedingende Nahewirkung erst im Abstand von etwa $2{,}5 \cdot 10^{-9}$ cm geltend, wie aus den Versuchen von Julie Bender[1]) folgt. Doch influenzierend muß die Wirkung schon auf größere Abstände hin bemerkbar sein.

Die Wirkung auf H_- ist größer wie auf H_+. Dies bedeutet, daß die Abtrennung des Elektrons von H_-, wodurch die Neutralisierung von H bewirkt und die Umladungweglänge von H_- begrenzt wird, beim Zusammenstoß von H_- mit Hg leichter vor sich geht als die Lostrennung eines Elektrons vom neutralen Hg-Atom (Hg_a), wodurch die Neutralisierung und damit die Weglänge von H_+ bedingt wird. Es ist auch durchaus wahrscheinlich, daß Hg_4 stabiler ist als H_-.

Ergebnisse: 1. Eine Theorie zur Beschreibung der Umladung von wechselnd neutralen, positiven und negativen Kanalstrahlatomen für reine und gemischte Gase wurde aufgestellt.

2. Es wurden Beobachtungen in Gemengen von H_2 mit Hg Gas angestellt und aus ihnen die Umladungsfunktionen für H_-, H_+, H_a in reinem H_2 und Hg Gas berechnet. Die Theorie erweist sich in erster Näherung als brauchbar.

3. Die Umladungsfunktionen lassen sich mit den Weglängen vergleichen, die für neutrale Atome aus der Gastheorie und für langsame Ionen aus der Theorie von Langévin durch M. Reinganum berechnet wurden. Die Vergleichung deutet darauf, daß das neutrale Kanalstrahlatom im Mittel einen größeren Radius haben dürfte als der einquantigen Bahn entspricht. Das negative H-Ion verliert leichter ein Elektron als das neutrale Hg-Atom. Negatives H_2 war nicht zu beobachten; seine Existenz als Ion ist daher noch zweifelhaft. Das Hg-Atom übt auf H_+-Kanalstrahlen eine starke Influenzwirkung aus, die aus dem metallischen Charakter seiner äußersten Elektronenschale erklärt werden kann. — Die Versuche wurden mit Apparaten ausgeführt, die wir der Preußischen Akademie der Wissenschaften und der Freiburger Wissenschaftlichen Gesellschaft verdanken.

(Eingegangen 9. Dezember 1920.)

1) J. Bender, diese Zeitschr. **19**, 410, 1918.

Die Berechnung des Absorptionsverlustes der Streustrahlung innerhalb des streuenden Körpers.

Von R. Glocker und M. Kaupp†[1]).

Die Intensität der aus einem bestrahlten Körper austretenden Streustrahlung, sowie die räumliche Verteilung der im Innern eines bestrahlten Körpers vorhandenen Streustrahlung auf rechnerischem Wege zu ermitteln, ist eine Aufgabe, die in verschiedener Hinsicht von Interesse ist.

1) M. Kaupp hat die Vollendung dieser Arbeit nicht mehr erlebt; er starb am 21. Juni 1920 an einer tückischen Krankheit.

Bei der technischen Anwendung der Röntgenstrahlen in der medizinischen Therapie hat neuerdings die Frage, um wieviel die in einem Volumelement des bestrahlten Körpers absorbierte Dosis (absorbierter Bruchteil der Primärstrahlung) durch die Streustrahlungsbeiträge der benachbarten Volumelemente erhöht wird, große praktische Bedeutung erlangt.

Bei Absorptionsmessungen an Röntgenstrahlen kann bei Verwendung von Strahlenbündeln, welche nicht gerade extrem engen Querschnitt besitzen, leicht der Fall eintreten, daß ein Teil der im absorbierenden Körper entstehenden Streustrahlung in das Meßgerät (z. B. eine Ionisationskammer) gelangt und das Ergebnis der Absorptionsmessung fälscht.

Bei der Messung kurzwelliger Strahlen in einer Ionisationskammer wird ferner durch die Zerstreuung der Strahlung auf ihrem Weg durch die Kammer eine Erhöhung des Ionisationseffektes bewirkt. Eine Korrektion dieses Einflusses erfordert die Kenntnis der in ein Volumelement eintretenden Streustrahlung der Umgebung als Funktion der Lage des betreffenden Volumelements.

Ein weiteres Beispiel für eine Untersuchung, bei der die Ermittlung des im streuenden Körper selbst wieder zur Absorption gelangenden Teiles der entstehenden Streustrahlung notwendig ist, bildet die Bestimmung der absoluten Größe des Zerstreuungskoeffizienten eines Stoffes.

Diese verschiedenen Probleme lassen sich auf die Lösung folgender Grundaufgabe zurückführen:

Auf eine Platte von der Dicke D trifft ein paralleles Röntgenstrahlenbündel (Energie E_0) senkrecht auf; wie groß ist die Energie der nach P gelangenden Streustrahlung, wenn von P aus der bestrahlte Teil der Platte unter dem körperlichen Winkel w gesehen wird und wenn P

1. der Vorderseite
2. der Rückseite der Platte gegenüberliegt.

(Vorder- bzw. Rückseite beurteilt vom Standpunkt eines am Ort der Röntgenröhre sich befindenden Beobachters aus.)

In einer früheren Arbeit[1]) hat der eine von uns unter der vereinfachten Voraussetzung, daß die Streuwirkung eines Volumelements nach allen Richtungen des Raumes in gleicher Weise erfolgt, d. h. daß der Streukoeffizient s in bezug auf den Azimutwinkel eine Konstante ist, eine Lösung dieser Grundaufgabe mitgeteilt.

Wie die experimentellen Beobachtungen von Barkla, Crowther u. a. zeigen, ist diese vereinfachte Annahme nur eine sehr grobe Annäherung an die wirklichen Verhältnisse; der Streukoeffizient ist eine komplizierte Funktion des Winkels (ϑ) zwischen Primärstrahl und Streurichtung. Die Form dieser Funktion hängt von der Atomstruktur und der Wellenlänge der Primärstrahlung ab und kann mit Hilfe der von Debye[1]) gegebenen Theorie der Streustrahlung berechnet werden. Für ganz kurze Wellen nimmt diese Funktion einen für alle Elemente universellen Charakter an. Mit Ausnahme eines sehr kleinen Winkelbereiches in der Umgebung des Primärstrahls ist die Streuung proportional mit $1 + \cos^2\vartheta$. Für das Kohlenstoffatom beträgt dieser Bereich bei einer Wellenlänge $\lambda = 0{,}25$ Å etwa 10 Grad.

Bei der Beschränkung auf kurzwellige Röntgenstrahlen — hier ist der Einfluß des Streueffektes übrigens besonders groß, da auch noch relativ weit entfernte Volumelemente wegen des geringeren Absorptionsverlustes auf dem Streuweg dem ins Auge gefaßten Volumelement Streustrahlungsbeiträge liefern — läßt sich eine gute Annäherung an die Wirklichkeit dadurch erreichen, daß man der Berechnung der Streuwirkung $1 + \cos^2\vartheta$ als Funktion der Winkelabhängigkeit[2]) zugrunde legt und nachträglich die erhöhte Streuwirkung des kleinen Winkelbereiches in der Umgebung des Primärstrahles als Zuschlag berechnet und hinzuaddiert.

§ 1. Berechnung der vorderseitigen Streustrahlung der Platte bei „normaler" Verteilung.

Bei der üblichen Definition des Streukoeffizienten s (eine homogene Röntgenstrahlung von der Energie E_0 erleidet beim Durchgang durch ein Medium infolge Zerstreuung auf dem Wege x in der Primärstrahlrichtung einen Energieverlust $= 1 - E_0\, e^{-s\cdot x}$), ist s ein Mittelwert, genommen über alle möglichen Richtungen. Trifft auf das Volumelement dx, dy, dz die primäre Strahlungsenergie E auf, so ist die gesamte von dem Volumelement ausgehende Streustrahlung $= s \cdot dx\, dy\, dz \cdot E$. Ist s_ϑ bzw. s_{90} der Wert des Streukoeffizienten bezogen auf den Elementarkegel dw, dessen Achse mit der Primärstrahlrichtung den Winkel ϑ bzw. 90^0 bildet, so besteht bei „normaler" Verteilung die Beziehung

$$s_\vartheta = s_{90}(1 + \cos^2\vartheta).$$

Der Mittelwert ergibt sich dann aus Gleichung 1 zu

1) Diese Zeitschr. **19**, 249 ff., 1918.

1) Ann. d. Phys. **46**, 809 ff., 1915; Anwendung dieser Theorie auf Kohlenstoff und Aluminium bei Glocker und Kaupp, Ann. d. Phys. **64**, Nr. 6, 1921.

2) In dieser Arbeit kurz als „normale" Verteilung bezeichnet.

$$s = 2\pi \int_0^{\pi} s_\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi s_{90} \int_0^{\pi} (1+\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{2\pi 8}{3} s_{90}. \quad (1)$$

Die vom Volumelement 1 ausgesandte und im Elementarkegel dw mit Achsenwinkel ϑ gegenüber der Primärstrahlrichtung enthaltene Streustrahlung ist dann

$$s_\vartheta \cdot dw \cdot E = 2\pi s_\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta E = \frac{3}{8} s (1+\cos^2\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta E. \quad (2)$$

Unter Berücksichtigung des Absorptionsverlustes der primären und der zerstreuten Strahlung erhält man dann für die aus der Vorderseite der Platte austretende und nach P

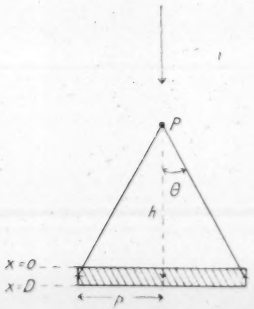


Fig. 1.

(Fig. 1) gelangende Streustrahlungsintensität Z folgendes Doppelintegral

$$\frac{Z}{E_0} = \frac{3}{8} s \int_0^D e^{-\mu x} dx \int_0^{\Theta} e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}} (1+\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{3}{8}\frac{s}{\mu} G. \quad (3)$$

E_0 = auf die Flächeneinheit der Vorderfläche der Platte auftreffende Primärstrahlungsintensität,

D = Dicke der Platte,

μ = Schwächungskoeffizient[1]) der Primärstrahlen, $\mu = \bar{\mu} + s$,

$\bar{\mu}$ = Absorptionskoeffizient.

Der erste Teil des Integrales

$$\int_0^D e^{-\mu x} dx \int_0^{\Theta} e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}} \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{F}{\mu} \quad (4)$$

wurde früher berechnet und ergab

$$F = 1 - C + \lg\left(\frac{C+1}{2}\right) - e^{-2\mu D} + Ce^{\left(1+\frac{1}{C}\right)\mu D} + Ei\left|-2\mu D\right| - Ei\left|-\left(1+\frac{1}{C}\right)\mu D\right| + \left(1+\mu D\right)e^{-\mu D}\left[Ei\left|-\frac{\mu D}{C}\right| - Ei\left|-\mu D\right|\right]. \quad (5)$$

Hierbei ist

$$C = \cos\Theta$$

und

$$Ei(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi$$

(sogenanntes Exponentialintegral[1]).

Der zweite Term, das Integral

$$\int_0^D e^{-\mu x} dx \int_0^{\Theta} e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}} \sin\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta = J \quad (6)$$

läßt sich durch Partialbruchzerlegungen und Umformungen auf eine Anzahl der früher berechneten Integrale zurückführen. Die Auswertung ergibt schließlich

$$6\mu J = 5 - e^{-2\mu D}(5 + 2\mu D + \mu^2 D^2) - 2A_1 - A_2 A_3 + e^{-\mu D B}[2A_1 + A_2 A_3 + \mu D\sqrt{A_2 A_3} + \mu^2 D^2 C] + e^{-\mu D}(\mu^3 D^3 + 3\mu^2 D^2 + 6\mu D + 6)\left[Ei\left|-\frac{\mu D}{C}\right| - Ei\left|-\mu D\right|\right] + 6\left(Ei\left|-2\mu D\right| - Ei\left|-\mu D B\right|\right) + 6\lg\left(\frac{C+1}{2}\right) \quad (7)$$

mit den Abkürzungen

$$A_1 = \frac{C}{C+1}(3+b^3)$$

$$A_2 = \frac{C^2}{(C+1)^2} \qquad A^3 = 3 + 2C - C^2$$

$$B = 1 + \frac{1}{C}.$$

Aus Gleichung (4) und (6) folgt somit

$$\frac{Z}{E_0} = \frac{3}{8}\frac{s}{\mu} G = \frac{3}{8}\frac{s}{\mu}(F + \mu J). \quad (8)$$

Die aus Gleichung (6) und (7) sich ergebende Formel für die Funktion G ist so umfangreich, daß es wünschenswert erscheint, für die praktische

1) Diese Zeitschr. 19, 249, 1918.

1) Tabuliert bei Jahnke und Emde, Funktionentafeln, S. 19.

Anwendung geeignete Näherungsformeln abzuleiten.

Für verschiedene Werte des Parameters C wurde G als Funktion von μD nach Gleichung (5) und (7) berechnet (Tabelle I) und aufgezeichnet (Fig. 2).

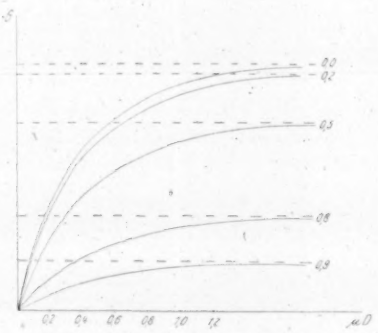


Fig. 2.

Tabelle I.

	Werte von G für				
μD	$C=0$	$C=0{,}2$	$C=0{,}5$	$C=0{,}8$	$C=0{,}9$
0	0	0	0	0	0
0,2	0,190	0,171	0,126	0,058	0,0243
0,4	0,292	0,275	0,206	0,096	0,0502
0,7	—	0,349	0,273	0,130	0,0717
0,8	0,388	—	0,286	—	—
1,0	0,413	0,393	0,309	0,153	0,0818
1,2	—	—	—	0,160	—
∞	0,447	0,429	0,342	0,173	0,0927

Die Kurven lassen sich sämtlich durch die Formel

$$G = A(1 - e^{-\alpha \mu D}) \qquad (9)$$

darstellen, wobei die Werte A und α von Kurve zu Kurve verschieden sind. Der Faktor A ist der Wert für G im Falle $\mu D = \infty$. Berechnet man aus den Formeln (5) und (7) G für $\mu D = \infty$, so läßt sich an Hand einer graphischen Darstellung leicht einsehen, daß die Abhängigkeit des G von C mit guter Näherung durch die Gleichung

$$G_\infty = 0{,}447 + 0{,}041\,C - 0{,}485\,C^2 \qquad (10)$$

geliefert wird. Der Exponent α in Gleichung (9) ist als lineare Funktion von C darstellbar,

$$\alpha = -0{,}67\,C + 2{,}63\,, \qquad (11)$$

so daß die endgültige Fassung der Näherungsformel lautet

$$G = (0{,}447 + 0{,}041\,C - 0{,}485\,C^2)\,(1 - e^{-\mu D\,(2{,}63 - 0{,}67\,C)}). \qquad (12)$$

Die durchschnittlichen Abweichungen der von der Näherungsformel gelieferten Werte von den genauen Werten betragen nur 2 Proz.; ausgenommen ist der Fall, daß gleichzeitig $C > 0{,}85$ und $\mu D < 0{,}3$ ist, hier versagt die Formel, indem sie viel zu große Werte liefert. Dieser Fall kann aber mit Hilfe der unten angegebenen Formel (15) erledigt werden, so daß es möglich ist die aus der Vorderseite der Platte austretende Streustrahlung auf einfache Weise (Gleichung 12 bzw. 15) in allen vorkommenden Fällen zu berechnen.

Spezialfälle.

Für die praktische Anwendung ist auch die genaue Formel infolge weitgehender Vereinfachung in einigen Spezialfällen gut geeignet;

1. $D = \infty$ $\Theta = 90^0$, also $C = 0$.

Dann ist nach Gleichung (7)

$$\mu J = \frac{1}{6}\,(5 - 6 \lg \text{nat}\, 2) \qquad (13)$$

und nach früherem

$$F = 1 - \lg \text{nat}\, 2\,, \qquad (14)$$

somit

$$\frac{Z_1}{E_1} = 0{,}153 \cdot \frac{s}{\mu} \quad \text{und} \quad \frac{Z_2}{E_2} = 0{,}167 \cdot \frac{s}{\mu}\,.$$

Z_2 bedeutet die unter Annahme der „normalen" Verteilung, Z_1 die unter der vereinfachten Annahme (gleiche Streuung nach allen Richtungen) berechnete Streuintensität.

Der Unterschied zwischen den beiden Berechnungsarten ist also im Fall einer ∞ dicken Platte und einem Öffnungswinkel von $\Theta = 90$ Grad (gesamte aus der Vorderseite der Platte austretende Streustrahlung) von der Härte der Primärstrahlung unabhängig und beträgt etwa 10 Proz.

2. D beliebig, Θ klein, $\cos\Theta = 1 - \delta$, wobei $\delta \ll 1$ ist.

Dann ergibt sich in erster Näherung aus der genauen Formel

$$G = \delta\,(1 - e^{-2\mu D}),$$

somit

$$\frac{Z_2}{E_2} = \frac{3}{8}\,\frac{s}{\mu}\,\delta\,(1 - e^{-2\mu D}), \qquad (15)$$

$$\frac{Z_1}{E_1} = \frac{1}{4}\,\frac{s}{\mu}\,\delta\,(1 - e^{-2\mu D}), \qquad (16)$$

hieraus

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1} = 0{,}50\,.$$

Unabhängig vom Öffnungswinkel, solange dieser klein ist, beträgt für beliebige Dicke der Platte der Unterschied zwischen den beiden Berechnungsweisen 50 Proz.

Zusammenfassend ist zu bemerken, daß bei „normaler" Verteilung die zerstreute Intensität durchweg etwas größer gefunden wird, als bei der früheren Rechnungsmethode (gleiche Streuung in allen Richtungen).

§ 2. Berechnung der rückseitigen Streustrahlung der Platte bei „normaler" Verteilung.

Im Falle der rückseitigen Streustrahlung (Fig. 3) lautet das Grundintegral, betreffs dessen

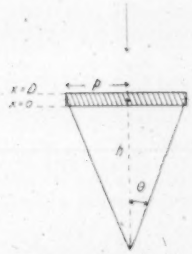


Fig. 3.

Ableitung auf die frühere Arbeit und § 1 dieser Arbeit verwiesen wird:

$$\frac{Z}{E_0} = \frac{3}{8} s \int_0^D e^{-\mu(D-x)} dx \int_0^\Theta e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}} (1+\cos^2\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{3}{8} \frac{s}{\mu} e^{-\mu D} \cdot g. \quad (17)$$

E_0 die auf die Vorderseite der Platte auftreffende Primärintensität.

Für den ersten Term

$$\int_0^D e^{-\mu(D-x)} dx \int_0^\Theta e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}} \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{e^{-\mu D}}{\mu} \cdot f \quad (18)$$

ergab sich früher

$$f = 0{,}5772 + C + \lg\mathrm{nat}(\mu D - \mu D C) + \left(\mu D - 1\right) e^{\mu D} \left[Ei\left\{-\mu D\right\} - Ei\left\{-\frac{\mu D}{C}\right\}\right] - C e^{-\left(\frac{1}{C}-1\right)\mu D} - Ei\left\{-\left(\frac{1}{C}-1\right)\mu D\right\}. \quad (19)$$

Für den zweiten Term

$$\int_0^D e^{-\mu(D-x)} dx \int_0^\Theta e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}} \sin\vartheta \cos^2\vartheta \, d\vartheta = f' \quad (20)$$

erhält man nach langwieriger Rechnung

$$6\mu f' = e^{-\mu D}(\mu^2 D^2 - 4\mu D + 3{,}462 + 6 \lg\mathrm{nat}\mu D(1-C) + A_4) + e^{-\frac{\mu D}{C}}(A_5 - A_4) + \left(\mu^3 D^3 - 3\mu^2 D^2 + 6\mu D - 6\right)\left(Ei\left\{-\mu D\right\} - Ei\left\{-\frac{\mu D}{C}\right\}\right) - 6 e^{-\mu D} Ei\left\{+\mu D B'\right\}, \quad (21)$$

wobei

$$B' = 1 - \frac{1}{C}$$

$$A_4 = \frac{2(C^3-3)}{B'} + \frac{(C^2-3)}{B'^2} + \frac{2(C-1)}{B'^3}$$

$$A_5 = \frac{2\mu D(C-1)}{B'^2} + \frac{\mu D(C^2-3)}{B'} - \frac{\mu^2 D^2 (C-1)}{B'}$$

gesetzt ist.

Beachtet man, daß wegen Gleichung (18) und (20)

$$e^{-\mu D} \cdot g = f \cdot e^{-\mu D} + \mu f' \quad (22)$$

ist, so liefert Gleichung (19) und (21) in Verbindung mit Gleichung (17) die Lösung der gestellten Aufgabe[1]).

In ähnlicher Weise wie in § 1 lassen sich für die Funktion g Näherungsformeln angeben. Einige nach der genauen Formel berechnete Werte von g sind in Tabelle II enthalten und in Fig. 4 graphisch dargestellt.

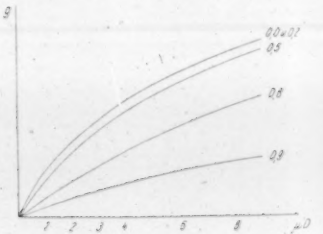


Fig. 4.

Tabelle II.

	Werte von g für				
μD	$C=0$	$C=0{,}2$	$C=0{,}5$	$C=0{,}8$	$C=0{,}9$
0	0	0	0	0	0
1	0,855	0,829	0,675	0,348	0,194
2	1,39	1,368	1,183	0,643	0,335
3	—	1,782	1,586	0,942	0,476
4	2,13	2,114	1,911	1,186	0,600
6	2,69	2,655	2,453	1,657	—
8	3,08	3,052	2,873	2,023	—
9	—	—	—	—	1,080

1) Eine auf eine andere Endformel führende Lösung für den Fall der rückseitigen Streustrahlung wurde von

Die gezeichneten Kurven lassen sich alle durch Näherungsparabeln dritter Ordnung darstellen

$$g = \mu D(K_1 - K_2 \mu D + K_3 \mu^2 D^2). \quad (23)$$

Für die Abhängigkeit der Konstanten K_1, K_2 und K_3 vom Parameter C genügt, wie die Rechnung zeigt, eine Parabel zweiter Ordnung. Die gesamte Näherungsformel lautet dann

$$g = \mu D\,[1{,}005 - 0{,}983\,C^2 - (0{,}175 - 0{,}13\,C - 0{,}0778\,C^2)\,\mu D + (0{,}0116 - 0{,}0128\,C - 0{,}00089\,C^2)\,\mu^2 D^2]. \quad (24)$$

Mit Ausschluß des Bereiches $C > 0{,}85$, wo die Formel keine gute Näherung (zu große Werte) liefert, beträgt der Fehler gegenüber der genauen Formel höchstens 5 Proz. Für C nahe bei 1 kann aber die einfache Formel (27) benützt werden.

Spezialfälle (Bezeichnungen wie in § 1).

1. D beliebig, Θ klein, $\cos\Theta = 1 - \delta$, $\delta << 1$.

Aus Gleichung (18) und (21) ergibt sich in erster Näherung

$$J' = \delta \cdot e^{-\mu D}\left(1 + \frac{\mu D}{\mu}\right), \quad (25a)$$

während nach früherem

$$J = \mu D \delta \quad (25b)$$

ist, somit

$$\frac{Z_1}{E_1} = \frac{1}{2}\frac{s}{\mu} \cdot \mu D \delta e^{-\mu D}, \quad (26)$$

$$\frac{Z_2}{E_2} = \frac{3}{8}\frac{s}{\mu}\,\delta e^{-\mu D}(2\mu D + 1), \quad (27)$$

hieraus folgt

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1} = 0{,}50 + 0{,}75 \cdot \frac{1}{\mu D}, \quad (28)$$

also unabhängig von der Öffnung des Streukegels, solange diese klein ist.

2. μD sehr groß, Θ klein.

Dann ist nach obigem

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1} = 0{,}50.$$

Übereinstimmend mit dem Ergebnis im Falle der vorderseitigen Streustrahlung beträgt für großes μD und sehr engen Streukegel unabhängig von der Härte der Unterschied zwischen beiden Berechnungsweisen 50 Proz., und zwar ergibt sich bei der „normalen" Verteilung der größere Wert für die Streuintensität.

Klein, Phil. Mag. **37**, 207, 1919, angegeben; dort ist von Gleichung (3) ab überall der versehentlich weggebliebene Faktor $e - k$ hinzuzufügen.

§ 3. Berechnung des Streuzuschlages für den Winkelbereich in der Umgebung des Primärstrahles.

Wie oben erwähnt, unterscheidet sich die wirkliche azimutale Verteilung der Streuung von der der Berechnung bisher zugrunde gelegten „normalen" Verteilung (Proportionalität mit $1 + \cos^2\vartheta$) dadurch, daß in dem kleinen Winkelbereich $\vartheta = 0^0$ bis $\vartheta = \psi^0$ in der Umgebung des Primärstrahles die Streuung wesentlich größer ist. Man kann diesem Sachverhalt am einfachsten dadurch Rechnung tragen, daß der Mehrbetrag an Streustrahlung dieses Winkelbereiches, soweit er den in der früheren Rechnung enthaltenen Streuungsbeitrag dieses Winkelbereiches übersteigt, als „Streuzuschlag" besonders berechnet und dem früheren Resultat hinzuaddiert wird.

Ist s_0 und s_ψ der Streukoeffizient in Richtung 0^0 und ψ^0 (Definition in § 1) bei „normaler" Verteilung und w_0 und w_ψ die entsprechenden Werte bei der tatsächlichen Verteilung, dann gilt

$$w_0 = s_0 + s_z \qquad w_\psi = s_\psi,$$

s_z und ψ sind abhängig von der chemischen Natur des streuenden Stoffes und der Wellenlänge der Primärstrahlung. In Fig. 5 ist die

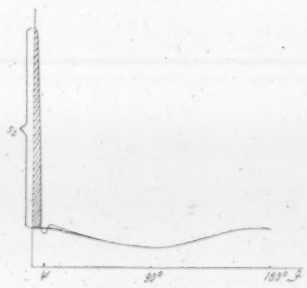


Fig. 5.

von uns[1]) früher aus der Atomstruktur berechnete Verteilung für Kohlenstoff bei einer Wellenlänge $\lambda = 0{,}25$ Å dargestellt (das schraffierte Gebiet entspricht dem Streuzuschlag).

Für die Berechnung des Streuzuschlages, der im allgemeinen im Verhältnis zu den Beiträgen der übrigen Winkelgebiete als klein anzusehen ist (bei der Integration über den Elementarkegel ist bei gleichem Streukoeffizienten der Beitrag eines Winkelbereiches $d\vartheta$ proportional mit $\sin\vartheta\, d\vartheta$), darf näherungsweise angenommen werden, daß im ganzen Gebiet 0^0

1) Ann. d. Phys. **64**. Nr. 6, 1921.

bis ψ^0 überall der zusätzliche Streukoeffizient durch den Mittelwert $\frac{s_z}{2}$ ersetzt werden darf.

Ist nun gegeben der Streukoeffizient s als Maß für die gesamte nach allen Richtungen des Raumes ausgesandte Streustrahlung eines Volumelementes, so ist zu erwarten, daß die Streukoeffizienten s_ϑ bzw. s_{90} für die Elementarkegel mit Achsenrichtung ϑ bzw. 90^0, einen anderen Bruchteil von s ausmachen, wenn die Art der azimutalen Verteilung der Streuung geändert wird. Bei der Berücksichtigung des Streuzuschlages gilt, wenn die Koeffizienten bei dieser Verteilung mit einem Index $'$ bezeichnet werden analog wie früher

$$s'_\vartheta = s'_{90}(1 + \cos^2\vartheta)$$

und anders als früher

$$s = \int_0^\psi 2\pi \frac{s_z}{2} \sin\vartheta d\vartheta + \int_0^\pi 2\pi s'_\vartheta \sin\vartheta d\vartheta, \quad (29)$$

hieraus

$$s = \pi s_z \delta' + 2\pi s'_{90} \cdot \frac{8}{3} = 2\pi s_{90}\left(\alpha\delta' + \frac{8}{3}\right), \quad (30)$$

wobei

$$\delta' = 1 - \cos\psi$$

und

$$\alpha = \frac{s_z}{2 s'_{90}}$$

bezeichnet ist.

In dem Falle des Kohlenstoffatomes ist

$\psi = 16^0 \quad \delta' = 0{,}04 \quad \alpha = 5$ für $\lambda = 0{,}5$ Å
$\psi = 10^0 \quad \delta' = 0{,}01_5 \quad \alpha = 5$ „ $\lambda = 0{,}25$ Å.

Bei der Berechnung der nach P gelangenden vorderseitigen Streustrahlung der Platte (Fig. 1) ändert sich nur der Zahlenfaktor vor dem Integral, weil jetzt die Beziehung zwischen s und s'_{90} aus Gleichung (30) zu entnehmen ist an Stelle der früher hierfür geltenden Gleichung (1). Es ergibt sich dann

$$\frac{Z}{E_0} = \frac{1}{\alpha\delta' + 2{,}666} \cdot \frac{s}{\mu} G. \quad (31)$$

Der Unterschied des Faktors vor $\frac{s}{\mu}G$ von dem früheren Wert 0,375 ist nur gering (für Kohlenstoff für $\lambda = 0{,}5$ Å etwa 7 Proz., für $\lambda = 0{,}25$ Å etwa 3 Proz.).

Im Falle der rückseitigen Streustrahlung (Fig. 3) ändert sich der Zahlenfaktor des früheren Resultates in gleicher Weise, wie eben besprochen.

Dazu kommt aber noch der Streuzuschlag A

$$A = 2\pi \frac{s_z}{2} \int_0^D e^{-\mu(D-x)} dx \int_0^\psi e^{-\frac{\mu x}{\cos\vartheta}} \sin\vartheta d\vartheta. \quad (32)$$

Aus Gleichung (32), (30) und (18) ergibt sich sodann

$$A = \frac{\alpha}{\alpha\delta' + 2{,}666} \frac{s}{\mu} e^{-\mu D} f(D, \psi). \quad (33)$$

Somit ist die nach P gelangende rückseitige Streustrahlung insgesamt

$$\frac{Z}{E_0} = \frac{1}{\alpha\delta' + 2{,}666} \frac{s}{\mu} e^{-\mu D}\Big(g(D, \Theta) + \alpha f(D, \psi)\Big). \quad (34)$$

Wenn δ' sehr klein ist, kann die Näherungsformel (25b) benutzt werden, so daß

$$A = \frac{\alpha}{\alpha\delta' + 2{,}666} \cdot s D \delta' e^{-\mu D} \quad (35)$$

wird.

Bei der Anwendung der Methode ist außer der Kenntnis des Streukoeffizienten s die Kenntnis der Werte α und ψ erforderlich. In allen Fällen, in denen A die Rolle eines Korrektionsgliedes spielt, können die für Kohlenstoff angegebenen Werte von α und ψ auch für andere niederatomige Elemente Anwendung finden. Vorsicht ist dagegen geboten, sobald der Winkel Θ klein wird, weil dann A einen großen Teil des Gesamtresultates darstellt. In diesem Fall wird die Berechnung mit den angegebenen Werten des Kohlenstoffes nur eine sehr grobe Näherung liefern, und zwar ist hieran nicht die Methode der Berechnung, sondern das Fehlen experimenteller Daten für α und ψ schuldig. Zur Orientierung möge die Angabe dienen, daß beim Kohlenstoff und $\lambda = 0{,}25$ Å der Streuzuschlag A etwa $^1/_{10}$ des gesamten Resultates für $\cos\Theta = 0$, etwa $^1/_8$ für $\cos\Theta = 0{,}5$, etwa $^1/_3$ für $\cos\Theta = 0{,}9$ beträgt.

§ 4. Berechnung der Streustrahlung für ein innerhalb des streuenden Körpers gelegenes Raumelement.

Liegt P innerhalb des streuenden Körpers (Fig. 6), welcher zunächst als Zylinder mit

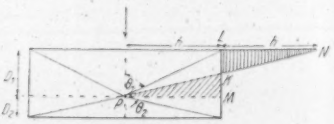


Fig. 6.

rechteckigem Querschnitt und der Höhe $D_1 + D_2$ angenommen werden möge, so ist das Verhältnis der in das betrachtete Volumelement P gelangenden Streuintensität zu der Primärintensität in P nach Gleichung (31), (34) und (35)

$$\frac{Z}{E} = \frac{1}{\alpha\delta' + 2{,}666} \frac{s}{\mu} [G(\mu D_2, \Theta_2) + g(\mu D_1, \Theta_1) + \alpha\mu D\delta'], \quad (36)$$

wobei zu beachten ist, daß in den früheren Formeln E_0 stets die Primärintensität auf der Vorderseite der strahlenden Schicht bedeutete.

Berechnet man die in Gleichung (36) vorkommenden Winkel aus

$$\operatorname{tg}\Theta_1 = \frac{h}{D_1} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\Theta_2 = \frac{h}{D_2}, \tag{37}$$

so findet man die Streustrahlung zu klein, weil der Beitrag des Bezirkes PLM (um die Symmetrieachse der Fig. 6 rotierend gedacht) nicht berücksichtigt ist; entsprechendes gilt für Θ_2. Setzt man Θ_1 und Θ_2 je $= 90$ Grad, das heißt denkt man sich den Körper als seitlich unendlich ausgedehnt, so findet man die Streustrahlung zu groß. Zwischen diesen beiden Grenzen liegt der wahre Wert von $\frac{Z}{E}$.

Wie aus der Fig. 6 zu ersehen ist, kann man mit guter Annäherung $\frac{Z}{E}$ dadurch bestimmen, daß man

$$\operatorname{tg}\Theta_1 = \frac{2h}{D_2}$$

setzt (entsprechendes gilt für Θ_2). Der in der Berechnung nicht enthaltene Beitrag von PKM wird kompensiert durch den Beitrag von KLN. Die beiden Bezirke sind dem Volumen nach gleich und jedes Volumelement liefert (im Mittel für beide Bezirke genommen) annähernd gleiche Streubeiträge nach P, da die Elemente von KLN zwar größere Primärintensität erhalten, andererseits aber von P weiter entfernt sind (Absorptionsverluste auf dem Streuweg) als die Elemente von PKM.

Für den Fall eines seitlich unendlich ausgedehnten Wasservolumens von 20 cm Dicke (in der Primärstrahlrichtung) enthält Tabelle III die Werte von $\frac{Z}{E} \cdot \frac{\mu}{s}$ für eine Primärstrahlung mit dem Schwächungskoeffizienten $\mu = 0{,}2$.

Es ist zu beachten, daß infolge der tertiären Streustrahlung in jedem Volumelement, das nach P hin einen Streubeitrag liefert, nicht nur die Primärintensität vorhanden ist, wie bisher bei der Berechnung angenommen wurde, sondern daß zu dieser noch die von Ort zu Ort verschiedene Streuintensität (Streubeiträge der Umgebung) hinzukommt. Der Einfluß der tertiären Streustrahlung läßt sich rechnerisch dadurch berücksichtigen, daß auf der rechten Seite der Gl. 36 hinzugefügt wird

$$\frac{Z}{E} q + \frac{Z}{E} q'.$$

Die Werte von $\frac{Z}{E} \cdot \frac{\mu}{s}$ in Spalte 2 der Tabelle III

Tabelle III.

D in cm	$\frac{Z}{E} \cdot \frac{\mu}{s}$	$\frac{Z'}{E} \cdot \frac{\mu}{s}$
0	0,16	0,18
2	0,32	0,40
4	0,43	0,57
6	0,56	0,75
8	0,66	0,88
10	0,76	1,01
12	0,84	1,12
14	0,91	1,21
16	0,97	1,27
18	1,00	1,25
20	0,96	1,10

sind somit zu multiplizieren mit $\frac{1}{1-q-q'}$.

Hierbei ist q bzw. q' der tertiäre Streubeitrag der Ober- bzw. Unterschicht. Der Absorptionsverlust der Streustrahlen von P nach dem Volumelement mit den Koordinaten x und ϑ ist $\frac{\mu x}{\cos\vartheta}$; ebenso groß ist der Absorptionsverlust der tertiären Streustrahlen von diesem Volumelement nach P hin. Der gesamte tertiäre Streubeitrag[1]), den alle Volumelemente der Oberschicht nach P hin liefern, ist dann

$$q = \frac{S}{2} \int_0^{D_1} dx \int_0^{\Theta_1} e^{-\frac{2\mu x}{\cos\vartheta}} \sin\vartheta \, d\vartheta \tag{38}$$

(entsprechend q, wenn D_2 und Θ_2 eingesetzt wird).

Das Integral läßt sich in früher berechnete Teilintegrale zerlegen, so daß sich schließlich ergibt

$$\begin{aligned} \frac{4\mu}{s} \cdot q = {} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2\mu D_1} + \mu D_1 e^{-2\mu D_1} + \\ & + 2\mu^2 D_1^2 Ei(-2\mu D_1) - \frac{\cos^2\Theta_1}{2} + \\ & + \left(\frac{\cos^2\Theta_1}{2} - \mu D_1 \cos\Theta_1\right) e^{-\frac{2\mu D_1}{\cos\Theta_1}} - \\ & - 2\mu^2 D_1^2 Ei\left(-\frac{2\mu D_1}{\cos\Theta_1}\right). \end{aligned} \tag{39}$$

In dem oben betrachteten Fall des seitlich unendlich ausgedehnten Körpers enthält dieser Ausdruck nur die vier ersten Terme.

Macht man nun, um den größtmöglichen Wert der tertiären Streustrahlungsbeiträge zu ermitteln, die Annahme, daß $\frac{s}{\mu} = 1$ ist, so er-

1) Zur Vereinfachung ist angenommen, daß die Streuung nach allen Richtungen in gleicher Stärke erfolgt. Wegen der experimentell beobachteten größeren Streuung in Richtung der erregenden Strahlung wird q eher kleiner sein als der aus Gl. 38 sich ergebende Wert.

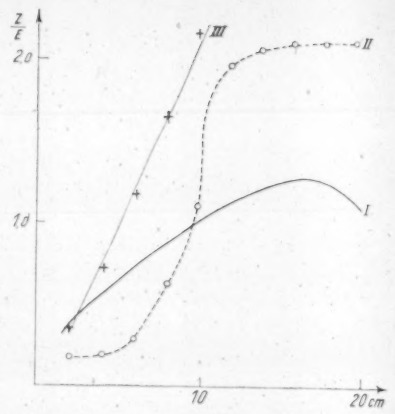
hält man für das Verhältnis der Streuintensität (einschließlich der Tertiärstrahlung) zu der Primärintensität in dem betreffenden Volumelement die in Spalte 3 der Tabelle III angegebenen Werte von $\frac{Z'}{E}$.

Es ist von Interesse, das Ergebnis der Berechnung mit den vorliegenden Messungen zu vergleichen. Friedrich[1]) hat mit einer kleinen Ionisationskammer, welche durch einen bleigeschützten, gut isolierten Draht mit einem Elektrometer verbunden ist, die Abnahme der Röntgenstrahlenintensität mit der Tiefe in einem Wasservolumen (Zylinder von 35 cm Durchmesser und 20 cm Höhe) gemessen und die Werte (A) ausgedrückt in Proz. der für $D = 0$ cm gemessenen Intensität. Außerdem ist angegeben ebenfalls ausgedrückt in Proz. der Oberflächenintensität, die Intensität (B) für jede Tiefenlage, die vorhanden wäre bei Ausschluß der Streustrahlung (Werte B sind berechnet aus dem Schwächungskoeffizienten $\mu = 0{,}21$ und der Fokusdistanz der Röhre). Durch eine kleine Umrechnung, bei der zu beachten ist, daß die Werte A auf die tatsächliche Oberflächenintensität, also $E_0 + Z_0$, die Werte B auf die ohne Streuung vorhandene Oberflächenintensität E bezogen sind, erhält man die Werte $\frac{Z}{E}$ (Tab. IV). Der Querschnitt der Primärstrahlung betrug auf der Wasseroberfläche 20 cm im Quadrat.

Tabelle IV.

D in cm	$\frac{Z}{E}$ (Friedrich)	$\frac{Z}{E}$ (Dessauer)
2	0,69	0,18
4	1,43	0,21
6	2,35	0,28
8	3,30	0,66
10	4,32	1,10
12	—	1,96
14	—	2,08
16	—	2,10
18	—	2,11
20	—	2,14.

In Fig. 7 entspricht Kurve I dem Ergebnis der Theorie für $\mu = 0{,}2$ im Fall des seitlich unendlich ausgedehnten Körpers, so daß der wirkliche Wert für $\frac{Z}{E}$ eher kleiner ist. Die Kurve III stellt die Messungen von Friedrich dar. Beide Kurven zeigen ähnlichen Verlauf und sind bis zu 10 cm Tiefe nahezu linear. Dagegen sind die absoluten Werte für $\frac{Z}{E}$ von Friedrich etwa 3 bis 4mal so groß wie die theoretischen, wobei sogar der Extremfall $\frac{s}{\mu} = 1$ der Berechnung zugrunde gelegt worden ist. Wenngleich die Größen α und δ' in Gleichung (36) für Wasser nicht genau bekannt sind, so überzeugt man sich doch leicht durch eine überschlägige Rechnung, daß beträchtliche Änderungen von α und δ' niemals das Rechnungsergebnis auf das Dreifache erhöhen können.



Bei Kurve III sind die Ordinatenwerte mit 2 zu multiplizieren.

Fig. 7.

Eine zweite Meßreihe, unter Benützung photographischer Films ist kürzlich von Dessauer[1]) angestellt worden. Der Schwächungskoeffizient ist $\mu = 0{,}15$, die bestrahlte Oberfläche nahezu gleich wie bei Friedrich, nämlich 18×24 cm. Die Kurve II zeigt einen wesentlich andersartigen Verlauf. Die Form der Kurve unterscheidet sich beträchtlich von der theoretischen Kurve I, dagegen ist die Übereinstimmung der absoluten Werte mit den theoretischen im allgemeinen besser als bei den Friedrichschen Messungen. Aus den Angaben von Friedrich über die Betriebsweise der Röntgenröhre[2]) kann man vermuten, daß das μ seiner Strahlung kleiner als 0,2 war. Dann vermindern sich zwar die absoluten Beträge, aber die nahezu lineare Form der Kurve bleibt bei

1) Friedrich u. Körner, Strahlentherapie **11**, 970, 1920.

1) Dessauer und Vierheller, Zeitschr. f. Phys. **4**, 131, 1921.

2) Dessauer und Friedrich benutzen teilweise einen Röntgenapparat gleicher Bauart bei gleicher Sekundärspannung (180000 Volt) und gleicher Filterung der Primärstrahlung.

einer Umrechnung auf $\mu = 0{,}15$ erhalten. Die typischen Unterschiede zwischen Kurve II und III finden sich auch bei Verwendung weniger weit geöffneter Strahlenbündel. Man wird als Ursache dieser Verschiedenheit charakteristische Einflüsse der angewandten Meßmethode ansehen müssen. Auch die wesentlich größeren Absolutwerte, als der Theorie entspricht, können dadurch bedingt[1]) sein, daß das Meßgerät auf Strahlen verschiedener Richtung in verschieden starker Weise entspricht (verschieden großer Absorptionsweg in der Substanz des Meßgerätes u. a.). Mit zunehmender Tiefe rührt ein immer größer werdender Bruchteil der gesamten Wirkung auf das Meßgerät von den schief einfallenden Streustrahlen her, so daß die Intensität bei der Messung in der Tiefe zu groß gefunden wird.

Nachdem nunmehr durch die vorliegende Arbeit die mathematische Seite des Problems erledigt ist, muß der nächste Schritt darin bestehen, die Ursache für die Verschiedenheit der Resultate der verschiedenen Meßmethoden aufzufinden. Wir haben daher eine experimentelle Bestimmung der Streustrahlung in Angriff genommen, und zwar unter Verwendung einer Methode, bei welcher der oben erhobene Einwand der Richtungsabhängigkeit des Meßeffektes wegfällt. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn das Meßgerät nach allen Richtungen symmetrisch gebaut ist. Diese Bedingung läßt sich dadurch verwirklichen, daß kleine kugelförmige Glasfläschchen mit einer röntgenempfindlichen Flüssigkeit oder mit photographischer Emulsion gefüllt werden und daß die bei Bestrahlung auftretende chemische Veränderung als relatives Intensitätsmaß benutzt wird.

1) Vgl. hierzu: Glocker, Münch. med. Wochenschr. Nr. 6, 178, 1921: Eine Ionisationskammer der in der Röntgentechnik üblichen Form ergibt je nach der Orientierung gegenüber der Strahlenrichtung ein Ansteigen des Ionisationsstromes auf das 2 bis 3fache.

Stuttgart, Röntgenlaboratorium an der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 18. Februar 1921.)

Die Röntgen-Bremsstrahlung.

Von A. March.

Das kontinuierliche Röntgenspektrum bildete in den letzten Jahren wiederholt den Gegenstand eingehender Untersuchungen[1]). Es wurde festgestellt, daß die Intensitätsverteilung dieser Strahlung sich stets durch eine Kurve darstellen läßt, deren Verlauf einigermaßen an die Intensitätskurve einer Temperaturstrahlung erinnert. Doch steht der Auffassung des kontinuierlichen Spektrums als einer Temperaturstrahlung die Tatsache entgegen, daß die Intensität der Röntgenstrahlung nach der Seite der kurzen Wellenlängen nicht asymptotisch gegen Null abnimmt, sondern an einer bestimmten Minimumwellenlänge λ_0 schroff abbricht. Die Größe von λ_0 bestimmt sich, nach den übereinstimmenden Untersuchungen von Duane und Hunt, Webster, Wagner u. a. einzig aus der Röhrenspannung V nach dem Einsteinschen Gesetz $\frac{c}{\lambda_0} h = eV$. Lilienfeld[1]) findet zwar, im Gegensatz zu den genannten Autoren, daß auf λ_0 auch die Stromfrequenz sowie die Brennfleckbelastung von Einfluß seien. (Bei der neuesten Apparattype „Radiosilex" der Firma Koch & Sterzel soll es lediglich die hohe Stromfrequenz von 500 Per. sein, der die mit dem Apparat erreichte kürzeste Wellenlänge von $\lambda_0 = 0{,}087$ Å zuzuschreiben sei.) Doch dürfte der beobachtete Einfluß seinen Grund wohl in einer versteckten Spannungssteigerung haben; denn man kann schwer an die Ungültigkeit einer Beziehung glauben, die mit Erfolg zu einer Präzisionsmessung von h benutzt worden ist.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[2]) zeigte Wagner, daß der von W. Wien vorhergesehene Dopplereffekt nicht die Grenzwellenlänge λ_0, sondern lediglich die Art der Intensitätsverteilung betrifft. Die erstere ist vom Winkel zwischen Kathoden- und Röntgenstrahl unabhängig. Dagegen besteht ein Einfluß dieses Winkels auf den Verlauf der Intensitätskurve, in dem Sinne, daß die Intensität der transversal zum Kathodenstrahl gerichteten Strahlung im kurzwelligen Teil des Spektrums größer ist als die einer rückläufigen Strahlung, während die Intensitäten im langwelligen Gebiet sich relativ nur wenig voneinander unterscheiden.

Außer der Tatsache einer Grenzwellenlänge λ_0 sind für eine Theorie der Röntgen-Bremsstrahlung noch die Ergebnisse der C. T. Ulreyschen Untersuchungen[3]) von Wichtigkeit, wonach die Wellenlänge $\lambda_{max.}$ der maximalen Intensität sich umgekehrt proportional zu $V^{1/4}$ ändert, während in Analogie zum Wienschen Verschiebungsgesetz Proportionalität zu V^{-1} erwartet werden möchte. Ferner fand Ulrey,

1) Vgl. den zusammenfassenden Bericht von E. Wagner im Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **16**, 190, 1919, sowie J. E. Lilienfelds Bericht über Hochvakuumröhren, ebd. 16, 105, 1919.

1) J. E. Lilienfeld, Ber. der sächsischen Akad. 1919.
2) Diese Zeitschr. **21**, 021, 1920.
3) C. T. Ulrey, Phys. Rev. **11**, 401, 1918.

daß die Gesamtintensität S der kontinuierlichen Strahlung proportional zu V^2 ist und in Abhängigkeit vom Antikathodenmetall annähernd proportional der Atomnummer des Strahlers ansteigt. Diesen Ergebnissen kommt freilich, ungeachtet der einwandfreien Versuchsanordnung, ein verminderter Grad von Sicherheit zu, da z. B. unbekannt ist, in welcher Abhängigkeit der am Kristall des Spektrometers reflektierte Intensitätsbruchteil vom Glanzwinkel steht und außerdem eine Ausmessung des Spektrums nach der Ionisationsmethode auf der Voraussetzung beruht, daß Ionisation und absorbierte Strahlenenergie in einem von der Wellenlänge unabhängigen Verhältnis stehen. In Wirklichkeit mag aber die ionisierende Wirkung einer und derselben absorbierten Strahlenmenge je nach der Wellenlänge sehr verschieden sein, so daß die Ionisation nicht ohne weiteres als Intensitätsmaß verwendet werden darf.

Eine Theorie des Bremsspektrums muß von der Erwägung ausgehen, daß ein auf die Antikathode aufprallendes Elektron nicht auf einen Ruck abgebremst wird, sondern seine Energie stets in einer Reihe von Zusammenstößen verliert. Für die Häufigkeit dieser Zusammenstöße sind, nach Lenard und Rutherford, nicht die Atomquerschnitte maßgebend; ein Elektron kann mitten durch ein Atom hindurchfliegen, ohne dabei eine Einbuße an Geschwindigkeit zu erfahren. Ein Geschwindigkeitsverlust findet nur statt, wenn das Elektron so nahe an einem der elektrisch geladenen Atombestandteile (Kern, Elektronen) vorbeifliegt, daß es von diesen eine genügend starke Kraft erfährt, um aus der bisherigen Bahn abgedrängt zu werden und einen Teil der Energie auf das Zentrum des einwirkenden Feldes zu übertragen. Es ist zweifelhaft, ob diese Einwirkung sich nach dem Zweikörperproblem berechnen läßt, da jedenfalls auch Quantengesetze mit im Spiele sind. Wir nehmen an, daß das Elektron nach N Zusammenstößen zum Stillstand kommt und berechnen, wie sich die Energie $E_0 = eV$ des Elektrons auf die N getroffenen Kraftfeldzentren verteilt. Es sei $N w dE$ die Zahl der Zentren, die durch den Zusammenstoß eine Energie zwischen E und $E + dE$ erhalten, wobei w eine Funktion von E ist. Es ist

$$\int_0^{E_0} w dE = 1 ; \qquad (1)$$

ferner ist, da die gesamte Energie der getroffenen Zentren $= E_0$:

$$N \int_0^{E_0} w E dE = E_0 . \qquad (2)$$

Die Entropie des Systems ist

$$S = - kN \int_0^{E_0} w \log w dE .$$

S wird ein Maximum, wenn

$$\log w + \beta E + \text{const.} = 0$$

oder

$$w = \alpha e^{-\beta E} . \qquad (3)$$

Die Konstanten α und β bestimmen sich aus (1) und (2). Es ist

$$\int_0^{E_0} w dE = \alpha \int_0^{E_0} e^{-\beta E} dE = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta E_0}) = 1$$

und

$$\int_0^{E_0} w E dE = \alpha \int_0^{E_0} e^{-\beta E} E dE = \frac{\alpha}{\beta} \left(- e^{-\beta E_0} \cdot E_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta E_0}) \right) = \frac{E_0}{N} .$$

Diese beiden Gleichungen geben durch einander dividiert:

$$\frac{- E_0}{e^{\beta E_0} - 1} + \frac{1}{\beta} = \frac{E_0}{N} ,$$

oder, wenn wir $\beta E_0 = x$ setzen:

$$\frac{- 1}{e^x - 1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{N} .$$

Zur Auflösung dieser Gleichung setzen wir $y = \frac{1}{x}$ und $y' = \frac{1}{e^x - 1}$. Die erste dieser Kurven ist eine gleichseitige Hyperbel; die zweite deckt sich für kleine x mit der ersten, weicht dann von der Hyperbel nach unten ab und sinkt rasch gegen Null. Die Differenz $y - y'$ ist für kleine x Null, steigt dann vor $x = 1$ zu einem Maximum auf und verläuft weiter annähernd wie $\frac{1}{x}$. Den Wert $\frac{1}{N}$ erreicht $y - y'$ zweimal, das erste Mal zwischen $x = 0$ und $x = 1$, das zweite Mal für x nahe $= N$. Der erste Wert führt zu keiner physikalisch möglichen Lösung; wir setzen daher $x = \beta E_0 = N$; $\alpha = \beta$ und erhalten für die Verteilungsfunktion

$$w = \frac{N}{E_0} e^{- \frac{NE}{E_0}} . \qquad (4)$$

Wir legen nun dem folgenden die Annahme zugrunde, daß ein getroffenes Atom, wenn es überhaupt die beim Zusammenstoß aufgenommene Energie E in Strahlung umsetzt, nur monochromatische Strahlung von der Schwingungs-

zahl $\nu = \frac{E}{h}$ aussenden könne. Anders als durch diese Annahme[1]), die übrigens durchaus dem Sinne der Bohrschen Atomtheorie entspricht, läßt sich die Tatsache der Grenzwellenlänge nicht erklären. Diese Grenzwellenlänge kommt darnach dann zustande, wenn das Elektron seine ganze Energie durch einen einzigen Zusammenstoß verliert.

Bekanntlich ist der Nutzeffekt der Röntgenstrahlenerzeugung außerordentlich gering; von der an einer Pt Antikathode auftreffenden Kathodenstrahlenenergie wird nach den Messungen von W. Wien, Seitz und Carter nur etwa 1 Prom. in Röntgenstrahlung umgesetzt. Wir müssen daraus schließen, daß es nur ein kleiner Teil der getroffenen Atome ist, der die Strahlung aussendet, während der größte Teil die Energie durch Wärmeleitung abgibt.

Ist i die Stromstärke, so treffen in der Sekunde $\frac{i}{e}$ Elektronen die Antikathode und verursachen, daß

$$Z = \frac{i}{e} N w \, dE = \frac{i}{e} \frac{N^2}{E_0} e^{-\frac{NE}{E_0}} dE$$

Atome eine Energie zwischen E und $E + dE$ erhalten. Dabei ist angenommen, daß an der Röhre eine konstante Spannung, etwa die einer Hochspannungsbatterie liegt, so daß die Elektronen mit durchwegs gleicher Geschwindigkeit an der Antikathode ankommen. Von Energieverlusten durch Zusammenstöße der Elektronen mit den Gasatomen können wir absehen, da die mittlere freie Weglänge des Elektrons im weitgehend verdünnten Gas der Röhre größer ist als der vom Elektron durchlaufene Weg. Von den getroffenen Z Elektronen strahlt ein Teil kZ die Energie kZE in der Schwingungszahl $\nu = \frac{E}{h}$ aus. Nach der Theorie des Oszillators ist die von Z Oszillatoren pro Sekunde abgegebene Strahlungsenergie proportional $\nu^2 ZE$, wenn E den Energieinhalt eines Oszillators bedeutet. Wir setzen daher $k = c \cdot \nu^2$, unter c eine Konstante verstanden und erhalten für die im Intervall von $\nu = \frac{E}{h}$ bis $\nu + d\nu = \frac{E + dE}{h}$ pro Sekunde ausgestrahlte Energie:

$$c\nu^2 ZE = c \cdot \frac{i}{e} \frac{N^2}{E_0} e^{-\frac{EN}{E_0}} \nu^2 E dE \qquad (5)$$

oder, wenn wir $E = h\nu$ und $E_0 = h\nu_0$ setzen:

$$R_\nu d\nu = c' \cdot i \frac{N^2}{\nu_0} e^{-\frac{N\nu}{\nu_0}} \nu^3 d\nu . \qquad (6)$$

Dieser Ausdruck gibt die Energie an, die im Intervall ν, $\nu + d\nu$ von der Antikathode sec^{-1} ausgesandt wird. Beziehen wir die Intensität statt auf die Schwingungszahl auf die Wellenlänge, so erhalten wir, wegen $d\nu = -\frac{1}{\lambda^2} d\lambda$:

$$R_\lambda d\lambda = C i N^2 \lambda_0 e^{-\frac{N\lambda_0}{\lambda}} \frac{1}{\lambda^5} d\lambda . \qquad (7)$$

Die Funktion R_λ gibt, in ein Koordinatensystem eingetragen, die Art der beobachteten Intensitätsverteilungen gut wieder. Die Wellenlänge λ_{max} der maximalen Intensität berechnet sich nach (7) aus der Bedingung

$$-\frac{5}{\lambda^6} + \frac{N\lambda_0}{\lambda^7} = 0$$

zu

$$\lambda_{max} = \frac{N\lambda_0}{5} . \qquad (8)$$

Aus den von Ulrey an Wolfram aufgenommenen Kurven ergibt sich bei einer Spannung von 50 KV

$$\lambda_0 = 0{,}25 \text{ Å}, \qquad \lambda_{max} = 0{,}47 \text{ Å},$$

somit $\lambda_{max} = 1{,}88 \lambda_0$. Die Röhre wurde dabei allerdings nicht mit der konstanten Spannung einer Hochspannungsbatterie, sondern mit der gleichgerichteten Spannung eines Transformators betrieben; da aber die Spannungsänderungen durch Kondensatoren möglichst ausgeglichen wurden, so kann man annehmen, daß der beobachtete Intensitätsverlauf nur wenig vom Falle konstanter Spannung abweicht. Der Wert von λ_{max} gibt in (7) eingesetzt $N = 9{,}4$. Aus unseren Annahmen folgt also, daß ein mit 50 KV Geschwindigkeit auf der Antikathode aufprallendes Elektron seine Energie in durchschnittlich 10 Zusammenstößen verliert.

Da das Elektron beim Eindringen in die Antikathode größtenteils mit den in der Mehrzahl vorhandenen Elektronen und nur in Ausnahmefällen mit dem positiven Kern der Metallatome zusammenstößt, so kann eine Änderung des Antikathodenmetalles auf die Zahl N nur von geringem Einfluß sein. Denn von dieser Änderung werden nur die Bedingungen beim Zusammentreffen mit einem positiven Kern betroffen, der eine mit wachsender Atomnummer zunehmende Anziehung auf das Elektron ausübt; die zunehmende Anziehung bedingt einen größeren Geschwindigkeitsverlust und damit eine (wegen der geringen Häufigkeit der Kernzusammenstöße kleine) Abnahme von N und entsprechende Abnahme von λ_{max}. In der Tat

1) Auch Wagner legt in der zitierten Arbeit diese Annahme seinen Betrachtungen zugrunde.

ergaben die Beobachtungen, daß die Lage des Intensitätsmaximums nur in geringem Maße von der Art des Antikathodenmetalles abhängt und sich mit steigender Ordnungszahl um ein Geringes nach der Seite der kurzen Wellenlängen verschiebt.

Aus der beobachteten Beziehung $\lambda_{max} V^{1/2} =$ const. müssen wir nach (8) schließen, daß N sich proportional $V^{1/2}$ ändert; denn es ist

$$N = \frac{5\lambda_{max}}{\lambda_0} = \frac{5eV\lambda_{max}}{c \cdot h}.$$

Die Zahl der mit Geschwindigkeitsverlust verbundenen Zusammenstöße ändert sich also proportional der Geschwindigkeit des Elektrons. Wir benützen dieses Ergebnis, um die gesamte pro Sekunde ausgesandte Strahlungsenergie S zu berechnen. Es ist nach (6):

$$S = c' i \frac{N^2}{v_0} \int_0^\infty e^{-\frac{Nv}{v_0}} v^3 dv = c' i \frac{N^2}{v_0} 6 \frac{v_0^4}{N^4} = 6 c' i \frac{v_0^3}{N^2},$$

da $v_0 = \frac{eV}{h}$, so ergibt sich, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen, Proportionalität der Gesamtintensität S zu iV^2.

Die maximale Intensität R_{max} berechnet sich nach (7) und (8) zu

$$R_{max} = C \cdot i N^2 \lambda_0 e^{-5} \frac{5^5}{N^5 \lambda_0^5} = C \cdot i \frac{e^{-5} \cdot 5^5}{N^3 \lambda_0^4},$$

ist also proportional $V^{1/2}$. Dieses Ergebnis, wonach R_{max} rascher als die Gesamtintensität mit V ansteigt, würde bedeuten, daß mit zunehmender Spannung ein immer größerer Teil der gesamten Strahlungsenergie sich in der Nähe des Maximums zusammendrängt.

Aus den angestellten Betrachtungen geht hervor, daß das Bremsspektrum offenbar in engen Beziehungen zur Temperaturstrahlung steht. Diese Beziehungen, auf die schon die beobachteten Intensitätsverteilungen hinweisen, treten besonders deutlich hervor, wenn wir die Röntgenstrahlung als eine Temperaturstrahlung betrachten, die von einzelnen besonders stark erhitzten Atomen der Antikathode ausgeht. Die Temperatur der strahlenden Oszillatoren bestimmt sich dann, wenn wir annehmen, daß die Energie eV des Elektrons sich gleichmäßig auf N Oszillatoren verteilt, aus der Beziehung

$$kT = \frac{eV}{N}. \qquad (9)$$

Dieser Temperatur entspricht eine schwarze Strahlung, deren Intensitätsverteilung nach Planck gegeben ist durch

$$k_\lambda = \frac{2c^2h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{ch}{\lambda kT}} - 1}. \qquad (10)$$

Die Wellenlänge λ_{max} der maximalen Intensität bestimmt sich daraus zu

$$\lambda_{max} = \frac{ch}{4{,}9651\, kT}.$$

Setzen wir darin für kT den Wert (9) ein, so erhalten wir

$$\lambda_{max} = \frac{chN}{4{,}9651 \cdot eV}.$$

Daß dieser Ausdruck zu richtigen Zahlenwerten für λ_{max} führt, erkennt man, wenn man berücksichtigt, daß $\frac{ch}{eV} = \lambda_0$, so daß

$$\lambda_{max} = \frac{N\lambda_0}{4{,}9651}$$

wird, ein Wert, der mit dem der Gleichung (8) nahe übereinstimmt.

Doch darf nicht verkannt werden, daß gegen den Fall der Temperaturstrahlung wesentliche Unterschiede bestehen; die durch (10) bestimmte Strahlung des schwarzen Körpers entspricht einem Gleichgewichtszustande zwischen der vom Körper absorbierten Energie einerseits und der ausgesandten Strahlung andererseits; eine Energieänderung der Körperelemente durch Wärmeleitung ist infolge der überall gleichen Temperatur nicht möglich. Im Gegensatz dazu handelt es sich im Falle der Röntgenstrahlung um einen strahlenden Körper, der in den einzelnen Punkten höchst ungleich temperiert ist. An Atome, die durch den Zusammenstoß mit einem Elekron auf eine enorme Temperatur erhitzt sind, grenzen unmittelbar andere, die relativ kalt sind. Infolge dieser innerhalb kleinster Räume rapid abfallenden Temperatur findet ein fortgesetzter Abfluß der Energie von den getroffenen Atomen weg statt. Ein weiterer wesentlicher Unterschied der Röntgen- gegenüber der Temperaturstrahlung ist dadurch gegeben, daß dem Energieinhalte der strahlenden Atome eine obere Grenze E_0 und damit dem Spektrum, zufolge der Bohrschen Frequenzbedingung eine Grenzwellenlänge λ_0 gesetzt ist. Eine solche Grenze ist der Temperaturstrahlung, bei der die Energie sich lediglich nach Wahrscheinlichkeitsgesetzen auf die einzelnen Atome verteilt, naturgemäß fremd.

Den schwierigsten Punkt einer vollständigen Theorie des Bremsspektrums bildet die Berechnung des Nutzeffektes bei der Umsetzung von Kathoden- in Röntgenstrahlen. Eine vor Jahren von Sommerfeld entwickelte Bremstheorie

(Berechnung der Strahlung nach der klassischen Theorie unter Zugrundelegung des Ansatzes: Bremsdauer mal Kathodenstrahlenergie $= h$) war imstande, diesen Wirkungsgrad zahlenmäßig (allerdings nicht in seiner Abhängigkeit vom Antikathodenmetall) zu erklären. Die im Vorhergehenden entwickelten Anschauungen lassen den Faktor c des Wirkungsgrades (Gleichung 5) unbestimmt; wenigstens fand ich keine Möglichkeit, über ihn Näheres zu ermitteln. Aus den Messungen geht hervor, daß c in erster Näherung proportional der Atomnummer der Antikathode ansteigt.

(Eingegangen 7. Februar 1921.)

Zur Theorie des Gleit- und Rollwiderstandes der festen Körper. II. (Rollende Reibung.)

Von Sigmund Fuchs.

II. Wir gehen nun zu den Widerständen beim Abrollen zweier Oberflächen aufeinander über. Das Gesetz der sog. „rollenden Reibung" wurde ebenfalls von Coulomb aufgestellt. Bezeichnet P den gesamten Normaldruck an der Berührungsstelle zwischen der Unterlage und dem rollenden Körper und ist $\mathfrak{M}$ das Widerstandsmoment, welches von dem beim Rollvorgange aufgewandten Drehmomente in jedem Augenblicke zu überwinden ist, dann besteht die Beziehung:

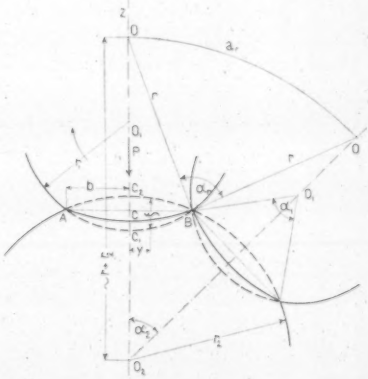
$$\mathfrak{M} = fP, \tag{8}$$

worin f ein „Koeffizient der rollenden Reibung" von der Dimension der Länge ist und als Material- bzw. als Oberflächenkonstante angesehen wird.

Es wurde schon längst erkannt, daß f nicht eine Materialkonstante, sondern eine Funktion der Krümmungsradien des rollenden Körpers und der Unterlage, der Belastung P usw. ist. Wir wollen das im Falle, daß ein elastischer Körper auf einer elastischen Unterlage rollt, beweisen.

Zunächst möge die Ursache des Rollwiderstandes in diesem Falle näher erklärt werden. Es ist eine bekannte Tatsache, daß der Belastungsvorgang bereits innerhalb der Elastizitätsgrenze irreversibel ist, und zwar, daß der gleichen Kraft beim Entlasten eine größere Deformation entspricht als beim Belasten. Der Vorgang ist der in den magnetischen Erscheinungen bekannten Hysteresis analog und wird oft elastische Hysteresis genannt. Innerhalb der Elastizitätsgrenze ist der momentane Formänderungsrest hauptsächlich eine Folge der zeitlich verzögerten Deformation. Daß diese Erscheinung von der Deformationsgeschwindigkeit und Temperatur beeinflußt wird, ist wohl erklärlich, wenn wir an die von William Thomson begründete „innere Reibung" der festen Körper denken.

Wir nehmen nun im folgenden an, daß eine elastische kreiszylindrische Walze vom Radius r_1 und der axialen Länge l auf einem zu ihr parallelen elastischen Kreiszylinder vom Radius r_2 rollt, wobei an der gemeinsamen



Berührungsstelle die normale Druckkraft P ausgeübt wird. Im Ruhezustande wäre die Berührungsfläche eine Zylinderfläche, die zwischen den sich berührenden Flächen in deren undeformiertem Zustande liegt und der Begrenzung derjenigen Walze ähnlicher ist, deren Elastizitätskoeffizient größer ist. Nach Hertz kann man die Größe ihres Halbmessers r aus der Beziehung berechnen:

$$\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{r} = \frac{\vartheta_2}{r_1} - \frac{\vartheta_1}{r_2}, \tag{9}$$

hierin bezeichnen ϑ_1 und ϑ_2 die Hertzschen Elastizitätskonstanten der beiden Zylinder, die mit der Youngschen E bzw. Poissonschen Elastizitätskonstante $\frac{1}{m}$ durch die Beziehung:

$$\vartheta = 4\,\frac{m^2 - 1}{m^2 E}$$

verbunden sind; die in das Innere des Körpers 1 gehenden Radien sind positiv gerechnet. Es ist demnach:

$$r = (\vartheta_1 + \vartheta_2)\,\frac{r_1 r_2}{\vartheta_2 r_2 - \vartheta_1 r_1}. \tag{9'}$$

Die Größe der „Drucksehne" im Querschnitte der Walzen beträgt:

$$2b = 2\sqrt{\frac{P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\pi l(\varrho_1 + \varrho_2)}}, \qquad (10)$$

worin

$$\varrho_1 = \frac{1}{r_1}, \quad \varrho_2 = \frac{1}{r_2}$$

die Krümmungen der beiden Flächen bezeichnen [1]).

Der Druck pro Flächeneinheit in der Berührungsfläche parallel der gemeinsamen Normalen während der ursprünglichen mathematischen Berührung (z-Achse), also in der Richtung des ausgeübten Druckes P beträgt:

$$p = \frac{2P}{\pi b^2 l}\sqrt{b^2 - y^2}, \qquad (11)$$

wo y die Abszisse des Flächenelementes bezeichnet. Die Druckverteilung ist demnach eine elliptische. Die Resultierende des Gegendruckes der Unterlage fällt mit P zusammen.

Während des Rollens kommt folgende Umgruppierung der Druckkräfte in der Berührungsfläche zustande: Rollt die Walze 1 im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers auf der Walze 2, so wird der vordere Teil BC der Berührungsfläche weiter belastet und erweitert, und zwar über B hinaus, während der hintere Teil AC in demselben Maße entlastet wird. Nun sind aber Belastungs- und Entlastungsvorgang aneinander nicht kongruent, und zwar erfolgt beim Entlasten die Wiederherstellung des alten Zustandes der deformierten Teile bei geringeren Druckkräften als beim Belasten, wodurch die Resultierende des Druckes in der Berührungsfläche von der Mittellinie in den vorderen Teil, also im Sinne der Bewegung verschoben wird. Berücksichtigen wir, daß infolge der elastischen Hysteresis die überrollten Teile beider Walzen nicht sogleich in die ursprünglichen Oberflächen zurückkehren, sondern eine kleine Niederdrückung aufweisen, so müssen wir annehmen, daß während des Rollens der hintere Teil AC des Berührungsbogens stets etwas kürzer sein muß als der vordere Teil BC. Dieses hat auch eine Verschiebung der Resultierenden des Druckes nach vorne zur Folge. Es muß demnach dem das Rollen fördernden Moment ein Widerstandsmoment entgegentreten, das wir wohl auf die ursprüngliche mathematische Berührungslinie beider Walzen beziehen und durch die Formel (8) ausdrücken können; nur verliert der „Hebelarm der Rollreibung" f den Namen einer Materialkonstanten.

Die Kenntnis der hysteresen elastischen Erscheinungen ist noch nicht so weit fortgeschritten, daß man f auf Grund des Verteilungsgesetzes der Druckkräfte in der Berührungsfläche während des Rollens ermitteln könnte. Wir wollen deshalb ein Näherungsverfahren anwenden. Es ist einleuchtend, daß wegen der genannten Abweichungen der elastischen Prozesse wirklicher Körper von den Formänderungen eines ideell elastischen Körpers, ein Teil der Formänderungsarbeit beim Rollen unausgenützt verloren geht, und zwar hauptsächlich wegen der verzögerten Rückfederung der deformierten Teile. Berechnen wir nun die Formänderungsarbeit bei der Berührung zweier elastischer Zylinder längs einer erzeugenden Geraden, die einen Druck P gegenseitig ausüben. In diesem Näherungsverfahren wollen wir auch die tangentialen Druckkomponenten in der Berührungsfläche ausschließen, also die Oberflächen als reibungsfrei ansehen. Dann gelten die Hertzschen Formeln. Die Summe der Einsenkungen ζ zweier einander entsprechenden Flächenelemente der Druckfläche in der Richtung des Druckes ist mit hinreichender Genauigkeit wegen der Kleinheit von y gegenüber den Radien r_1 und r_2 gleich:

$$\zeta = \frac{b^2 - y^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \qquad (12)$$

Setzen wir für die Summe der Krümmungen den Wert aus (10) ein, dann ist:

$$\zeta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\pi}\frac{P}{b^2 l}(b^2 - y^2). \qquad (12')$$

Die innere Formänderungsarbeit ist gleich der äußeren von der Größe:

$$L = \frac{1}{2}\int p\,\zeta\,dA;$$

dA bezeichnet ein Flächenelement der Druckfläche, wofür unbedenklich $l\,dy$ eingesetzt werden kann. Wir erhalten demnach nach Einsetzen der Werte:

$$L = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\pi^2}\frac{P^2}{b^4 l}\int_0^b (b^2 - y^2)^{3/2}\,dy.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist gleich:

$$J = \left|\frac{(\sqrt{b^2 - y^2})^3}{4}y + \frac{3}{8}b^2\left[y\sqrt{b^2 - y^2} - b^2 \arcsin\frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b}\right]\right|_0^b.$$

Nach Einsetzen der Grenzen ergibt sich:

$$L = \frac{3}{16\pi}(\vartheta_1 + \vartheta_2)\frac{P^2}{l}. \qquad (13)$$

1) In der Figur ist die Drucksehne der Deutlichkeit wegen übertrieben groß verzeichnet worden.

Man denke sich nun die Walze 1 um ein kleines Stück fortgerollt, und zwar so, daß die Berührung längs des nächsten Streifens $2b$ erfolge. Der dieser Bewegung entsprechende Drehungswinkel α_r des Radius r ergibt sich genau genug aus der Beziehung (s. Fig.):

$$\widehat{a}_r = r\alpha_r = (r + r_2)\alpha_2,$$

worin $\alpha_2 = \frac{2b}{r_2}$ gesetzt werden kann. Es ist demnach:

$$\alpha_r = \frac{r + r_2}{r r_2} 2b$$

oder

$$\alpha_r = (\varrho + \varrho_2) 2b,$$

worin $\varrho = \frac{1}{r}$.

Berücksichtigen wir die Gleichung (9), dann ist:

$$\alpha_r = \frac{2\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2}(\varrho_1 + \varrho_2) b. \qquad (14)$$

Bezeichnen wir durch $\mathfrak{M}$ den mittleren Wert des Widerstandsmomentes beim Rollen um den bezeichneten Betrag, dann ist:

$$\mathfrak{M}\alpha_r = \psi L,$$

worin ψ ein Zahlenkoeffizient kleiner von 1 ist und den unausgenützt verbliebenen Teil der Formänderungsarbeit anzeigt.

Für zwei Walzen ergibt sich laut (10), (13) und (14):

$$\mathfrak{M} = \frac{3}{32}\psi \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\vartheta_2} bP.$$

Stellen wir den Wert für b ein und führen ein die Bezeichnung:

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \varrho_\varkappa,$$

worin $\varrho_\varkappa$ ein Maß der Krümmung ist, dann folgt:

$$\mathfrak{M} = \frac{3}{32}\psi \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\vartheta_2} \sqrt{\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\pi} \frac{P}{l\varrho_\varkappa}}\, P. \qquad (15)$$

Berühren sich die Walzen von innen, rollt also der Zylinder 1 in dem Zylinder 2, dann ist ϱ_2 in der Formel für $\varrho_\varkappa$ negativ einzusetzen. Setzt man $\varrho_2 = 0$, dann gilt die Formel für das Rollen einer Walze auf einer Platte. Der Hebelarm des Rollwiderstandes ist demnach keine Materialkonstante, sondern außer von der Materialbeschaffenheit noch von der Krümmung der Körper, der Größe des Druckes auf die Längeneinheit des Zylinders und der Rollgeschwindigkeit abhängig; mit zunehmender Geschwindigkeit muß nämlich der Koeffizient ψ wegen des zunehmenden Einflusses der verzögerten Rückfederung der deformierten Teile wachsen. Dupuit und Perry haben aus den Rollversuchen einer Walze auf einer Platte festgestellt, daß das Widerstandsmoment der Wurzel aus dem Durchmesser proportional sei, was die Formel (15) auch ergibt.

Im Falle der Berührung zweier elastischen Kugeln von den Halbmessern r_1 und r_2 unter normalem Gesamtdruck P ist die Berührungsfläche eine Kugelkalotte vom Radius r, dessen Größe ebenfalls die Formel (9′) bestimmt. Die Größe des Halbmessers des die Kugelkalotte abgrenzenden „Berührungskreises" beträgt nach Hertz:

$$b = \sqrt[3]{\frac{3}{16} P \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\varrho_1 + \varrho_2}}. \qquad (16)$$

Der Einheitsdruck in der Berührungsfläche in der Richtung des ausgeübten Druckes P ist gleich:

$$p = \frac{3}{2\pi} \frac{P\sqrt{b^2 - y^2}}{b^3}. \qquad (17)$$

Die Summe der Einsenkungen der einander entsprechenden Flächenelemente ist laut (12) und (16):

$$\zeta = \frac{3(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{32} \frac{P}{b^3}(b^2 - y^2). \qquad (12'')$$

Bezeichnen wir mit hinreichender Genauigkeit durch $2\pi y\, dy$ die Größe dA eines Flächenelementes in der Druckfläche, dann ist die Formänderungsarbeit:

$$L = \frac{1}{2}\int p\zeta\, dA$$

oder nach Einsetzen der Werte:

$$L = \frac{9}{64}(\vartheta_1 + \vartheta_2)\frac{P^2}{b^6}\int_0^b (b^2 - y^2)^{2}\, y\, dy.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist gleich:

$$I = -\left|\frac{1}{5}(b^2 - y^2)^{5/2}\right|_0^b = \frac{b^5}{5}$$

und demnach:

$$L = \frac{9}{320}(\vartheta_1 + \vartheta_2)\frac{P^2}{b}. \qquad (18)$$

Rollt die Kugel 1 auf der Kugel 2, dann gilt die vorige Beziehung:

$$\mathfrak{M}\alpha_r = \psi L.$$

Mit (14), (16) und (18) ergibt sich:

$$\mathfrak{M} = \frac{3}{40}\psi \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\vartheta_2} bP,$$

oder mit (16) und der Bezeichnung der Summe der Krümmungen durch $\varrho_\varkappa$:

$$\mathfrak{M} = \frac{3}{40}\,\psi\,\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{\vartheta_2}\sqrt[3]{\frac{3\,(\vartheta_1+\vartheta_2)}{16}\,\frac{P}{\varrho_x}}\,P. \quad (19)$$

Rollt eine Kugel auf einer Platte, dann ist $\varrho_x = \varrho_1$.

Wären der rollende Körper und die Unterlage vollkommen elastisch, so müßte trotzdem ein Rollwiderstand auftreten, und zwar aus folgenden Gründen: Wird z. B. ein Zylinder vom Radius r_1 auf eine Platte unter Druck P aufgelegt, dann wird der der „Drucksehne" $2b$ entsprechende Bogen $2s_1$ des Zylinders auf die dem Radius r des Berührungszylinders entsprechende Länge $2s$ verkürzt; gleichzeitig wird die entsprechende Länge $2b$ der Platte zum Bogen $2s$ ausgedehnt. Es tritt somit eine relative gleitende Bewegung zwischen Zylinder und Unterlage auf, wodurch Gleitreibung geweckt wird. Während des Rollens geschieht nun folgendes: Im Bereiche der vorderen Hälfte der Drucksehne $2b$ werden die Flächenelemente der Unterlage vor der tiefsten Berührungsstelle ausgedehnt und nach vorne geschoben und die entsprechenden Elemente der Walze komprimiert und nach der Mitte verrückt. Die bei dieser relativen Bewegung entstehende Gleitreibung ist in bezug auf die Walze nach vorne gerichtet. Im Bereiche der zweiten Hälfte der Drucksehne geht die Entlastung vor; es werden demnach die Flächenelemente des Zylinders von dem äußersten Berührungsstreifen an ausgedehnt und nach hinten verschoben und entsprechende Teile der Unterlage verkürzt und nach der Mitte verrückt, wodurch wieder eine Gleitreibung entsteht, die auf die Walze nach vorne wirkt. Es wird also während der Bewegung der Walze ein das Rollen bremsendes Moment der Gleitreibung entwickelt.

Es muß bemerkt werden, daß während des geschilderten Rollvorganges die Walze nicht ihren ursprünglichen Umfang und nicht auf der ursprünglichen Oberfläche der Unterlage abwickelt; es rollt vielmehr ein verkürzter Umfang auf einer gedehnten Oberfläche. Der nach einer Umdrehung der Walze auf der ebenen Unterlage wirklich zurückgelegte Weg ist demnach etwas kürzer als der Umfang der Walze.

Rollt eine Walze aus einem in hohem Grade dehnbaren elastischen Materiale auf einer verhältnismäßig harten ebenen Unterlage, dann muß neben der vertikalen Zusammendrückung der Walze auch ihre horizontale Ausdehnung berücksichtigt werden. Die Größe der Drucksehne $2b$ ist in diesem Falle größer als die nach der Hertzschen Formel berechnete und dem Drehungswinkel der Walze α_1 um ihren Mittelpunkt O_1 entsprechende Länge; der Berührungsbogen $2s$ ist trotz der teilweisen Verkürzung länger als der ursprüngliche Bogen $2s_1$ in undeformiertem Zustande. Die von einer Kautschukwalze auf einer eisernen schiefen Ebene oder die von einem Automobilaufrad auf hartem Pflaster rollend durchlaufene Strecke muß demnach größer sein als die dem Radius r_1 entsprechende geometrische Rollstrecke. Die Walze gleitet demnach einen kleinen Teil der Strecke schlittenartig durch.

Ist die Walze erheblich härter als die Unterlage, dann findet das Umgekehrte statt. Die Länge $2b$ ist größer als der Abstand der betreffenden Endpunkte A und B auf der undeformierten Platte. Durch das teilweise seitliche Verdrängen der Oberflächenteilchen der Unterlage über die Ränder der Berührungsfläche hinaus entsteht von beiden Seiten derselben eine wulstförmige, komprimierte Erhebung, wodurch die Berührungsfläche noch vergrößert wird. Es ist zu beachten, daß wegen der seitlichen Kompression außerhalb der Berührungsfläche die Entfernung der entsprechenden Flächenelemente auf der Platte kurz vor dem Überrollen durch die Walze kleiner ist als in natürlichem Zustande der Oberfläche, wodurch bei der folgenden Ausdehnung durch die Walze die Gleitungsstrecke an derselben noch vergrößert wird.

Die Grundzüge der Erklärung über den Anteil der gleitenden Reibung an den Rollwiderständen stammen von O. Reynolds[1]), der auch das Vorhandensein der Gleitung experimentell nachgewiesen hat.

Sind die Körper nicht vollkommen elastisch, treten also hystere Erscheinungen auf, dann werden die Gleiterscheinungen wohl etwas modifiziert, doch bleibt ihr Gesamtbild dasselbe. Es ist klar, daß man in diesem Falle für den Rollwiderstand die Summe des Widerstandes infolge der unvollkommenen Umkehrbarkeit der elastischen Deformation und der durch die Elastizität des Materials bedingten Gleitung einsetzen muß.

Wir wollen nun die Größe der Gleitung für den Fall berechnen, daß die Formänderung den Hertzschen Formeln entspricht und die inneren Materialverschiebungskräfte die in der Berührungsfläche auftretende Haftreibung zu überwinden vermögen. Bezeichnet nun wie früher $2s_1$ die Länge des Bogens AC_1B (s. Fig.) des rollenden Körpers und $2s_2$ die Größe des Bogens AC_2B der Unterlage, beide der Drucksehne $AB = 2b$ entsprechend, dann ist

1) „On rolling Friction", London, Phil. Transact., Vol. 166, Part 1 (1876).

die relative Gleitung, bezogen auf die Längeneinheit des Umfanges des rollenden Körpers, gleich:

$$S = \frac{s_1 - s_2}{s_1},$$

wobei:

$$2s_1 = r_1\alpha_1,$$
$$2s_2 = r_2\alpha_2.$$

Nun ist aber:

$$\sin\frac{\alpha_1}{2} = \frac{b}{r_1},$$
$$\sin\frac{\alpha_2}{2} = \frac{b}{r_2},$$

oder, weil

$$-1 < \frac{b}{r_{1,2}} < +1$$

ist

$$\frac{\alpha_{1,2}}{2} = \arcsin\frac{\alpha_{1,2}}{2} = \frac{b}{r_{1,2}} + \frac{1}{6}\left(\frac{b}{r_{1,2}}\right)^3 + \frac{3}{40}\left(\frac{b}{r_{1,2}}\right)^5 + \frac{15}{336}\left(\frac{b}{r_{1,2}}\right)^7 + \cdots$$

Wegen der Kleinheit des Verhältnisses $\frac{b}{r_{1,2}}$ genügt es, nur die zwei ersten Glieder der Reihe zu behalten. Wir erhalten demnach:

$$S = \frac{b^2\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)}{6 + \frac{b^2}{r_1^2}},$$

oder hinreichend genau:

$$S = \frac{b^3}{6}(\varrho_1^2 - \varrho_2^2). \qquad (20)$$

Sind beide Körper Walzen, dann ist mit (10):

$$S = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{6\pi}(\varrho_1 - \varrho_2)\frac{P}{l}. \qquad (21)$$

Für starre Körper: $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ ist $S = 0$. Ist $\varrho_1 = \varrho_2$, dann soll $S = 0$ sein; berücksichtigen wir aber neben der Zusammendrückung der Walzen auch ihre senkrecht zur Richtung des Druckes vollzogene Ausdehnung, dann wird je nach der Größe des Verhältnisses $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$ ein gewisser „Schlupf" sich ergeben. Für $\vartheta_1 = \vartheta_2$ und $\varrho_1 = \varrho_2$ muß selbstredend $S = 0$ sein. Berühren sich die Walzen von innen, dann ist ϱ_2 negativ in die Formel (21) einzusetzen. Rollt eine Walze auf einer Platte, dann ist $\varrho_2 = 0$.

Rollt eine Kugel auf einer Kugelfläche, dann ist mit (16) und (20):

$$S = \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2)^{2/3}}{8\sqrt[3]{12}}\varrho_\varkappa^{1/3}(\varrho_1 - \varrho_2)P^{2/3}, \qquad (22)$$

worin

$$\varrho_\varkappa = \varrho_1 + \varrho_2.$$

Für eine Kugel auf einer Platte folgt mit $\varrho_2 = 0$.

$$S = \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2)^{2/3}}{8\sqrt[3]{12}}\varrho_1^{1/3}P^{2/3}. \qquad (22')$$

Wir wollen nun den Einfluß der Verteilung der Masse des rollenden Körpers über sein Volumen auf die Größe des das Rollen bremsenden bzw. fördernden Momentes untersuchen. Es genügt bei dieser Aufgabe die kleinen Deformationen der Körper außer acht zu lassen und die Körper als starr zu behandeln. Wir nehmen nun an, daß eine Walze vom Radius r_1 auf einer zweiten ihr parallelen vom Radius r_2 bzw. eine Kugel auf einer Rotationsfläche längs eines Meridians, dessen Radius r_2 ein Maximum oder Minimum ist, rollt, wobei der Schwerpunkt Σ des rollenden Körpers um e in der Richtung des Radius r_1 vom Mittelpunkte verschoben ist. Unseren Betrachtungen legen wir ein rechtwinklig-geradliniges Koordinatensystem zugrunde, und zwar derart, daß sein Anfang mit dem Mittelpunkte O_2 des Kreises r_2 zusammenfällt und die vertikale z- und die horizontale x-Achse in der durch die Kreise r_1 und r_2 bezeichneten Querschnittsebene liegen. Der Schwerpunkt Σ beschreibt während des Rollens eine Epitrochoide, deren Ordinate gleich ist:

$$z = (r_1 + r_2)\cos\left(\frac{r_1}{r_2}\alpha_1\right) - e\cos\left(\frac{r_1 + r_2}{r_2}\alpha_1\right),$$

wenn die Anfangslage des rollenden Körpers den Bedingungen $x = 0$, $z = r_1 + r_2 - e$ entspricht, also Σ auf der positiven z-Achse, und zwar unterhalb des Mittelpunktes O_1 des Kreises r_1 liegt. α_1 ist der Umdrehungswinkel des rollenden Körpers von der Anfangslage an gerechnet um seinen geometrischen Mittelpunkt O_1. Wir bezeichnen durch α_2 den Winkel, den die gemeinsame Normale O_1O_2 mit der positiven Richtung der z-Achse einschließt. Bei „reinem" Rollen muß die Bedingung:

$$\alpha_2 = \frac{r_1}{r_2}\alpha_1$$

erfüllt sein. Wächst α_1 um $d\alpha_1$, so entspricht diese Bewegung einer Drehung des rollenden Körpers um die durch den Berührungspunkt der beiden Kreise gehende Momentanachse um den Winkel:

$$d\beta = d\alpha_1 + d\alpha_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}d\alpha_1.$$

Dabei ändert sich z um:

$$dz = \left[-r_1 \sin\left(\frac{r_1}{r_2}\alpha_1\right) + \right.$$
$$\left. + e \sin\left(\frac{r_1 + r_2}{r_2}\alpha_1\right)\right] \frac{r_1 + r_2}{r_2} d\alpha_1.$$

Bezeichnet Q das Eigengewicht des rollenden Körpers und $\mathfrak{M}$ ein das Rollen beeinflussendes Moment, dann besteht die Beziehung:

$$Q\, dz = \mathfrak{M}\, d\beta$$

und nach Einsetzen der Werte ergibt sich:

$$\mathfrak{M} = \{e \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - r_1 \sin\alpha_2\}\, Q. \quad (23)$$

Je nachdem $\mathfrak{M}$ positiv oder negativ wird, ist es ein das Rollen bremsendes oder förderndes Moment.

Rollt der Körper 1 auf einer Platte, dann ist mit $\alpha_2 = 0$

$$\mathfrak{M} = Q\, e \sin\alpha_1. \quad (23')$$

Während beim äußeren Rollen der Körper aufeinander die die beiden Winkel α_1 und α_2 kennzeichnenden Pfeile denselben Umdrehungssinn anzeigen, sind sie beim inneren Rollen entgegengesetzt gerichtet. Es ergibt sich demnach die Formel für das innere Rollen, wenn in (23) α_1 negativ eingesetzt wird:

$$\mathfrak{M} = \{e \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - r_1 \sin\alpha_2\}\, Q; \quad (23'')$$

die Anfangslage des rollenden Körpers entspricht dabei der Bedingung:

$$x = 0, \quad z = r_2 - r_1 - e.$$

Ist die Geschwindigkeit des auf einer Ebene rollenden exzentrischen Körpers ziemlich groß, dann tritt die Wirkung der Zentrifugalkraft ins Spiel. Der Druck an der Berührungsstelle wird durch dieselbe periodisch beeinflußt. Sind Rollkörper und Unterlage elastisch, dann ist die Enveloppe der momentanen Berührungsflächen in der Unterlage, also die Rollbahn, eine Wellenfläche und der Rollkörper wogt auf der Unterlage. Körper und Unterlage werden in Schwingungen versetzt, die sich weiter ausbreiten und unter Bildung von Schallwellen wegen der inneren Reibung gedämpft, die nutzbare Energie zerstreuen.

Zusammenfassung.

Es werden:

I. Die sog. „trockene" gleitende Reibung der festen Körper durch die hydrodynamische Reibung der die Körper trennenden Luftschicht begründet und die bekannten empirischen Reibungsgesetze ihrem physikalischen Sinne nach erläutert [1];

die Reibungserscheinungen zwischen besonders gereinigten Oberflächen in einem evakuierbaren Raume (Versuch von Ch. Jakob) auf Grund des hydrodynamischen Ansatzes erklärt und die beobachtete Abhängigkeit zwischen dem Reibungswinkel und der Geschwindigkeit durch eine exponentielle Funktion ausgedrückt;

II. der Rollwiderstand der elastischen Körper bei Annahme einer unvollkommenen Elastizität auf Grund eines Näherungsverfahrens ermittelt und die Abhängigkeit des „Hebelarmes der Rollreibung" von den Materialkonstanten, den Krümmungen des rollenden Körpers und der Unterlage, der Belastung und der Rollgeschwindigkeit erwiesen;

die Ursache des „Schlupfs" beim Rollen elastischer Körper behandelt und der Anteil der gleitenden Reibung an dem Rollwiderstande für den Fall ermittelt, wenn die Körper verhältnismäßig hart sind;

der Einfluß der Verteilung der Masse des rollenden Körpers über sein Volumen auf die Größe des Widerstandsmomentes untersucht.

1) Kurz vor dem Absenden der Handschrift bin ich auf die Schrift des Herrn Prof. Dr.-Ing. L. Gümbel: „Wer ist wirklich blind?" (mit einem Beitrag: Die unmittelbare Reibung fester Körper, Berlin, 1920) aufmerksam gemacht worden, in der ebenfalls der Einfluß der durch die Körperoberflächen adsorbierten Gasschicht auf die Größe der Reibung hervorgehoben wird; bezüglich der Rollreibung findet man dort sehr interessante Untersuchungen.

Lemberg, Technische Hochschule, Juli 1920.

(Eingegangen 8. November 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Kritische Betrachtungen zur traditionellen Darstellung der Thermodynamik.

Von M. Born.

Einleitung.

Das mathematische Handwerkszeug, das der Physiker zur Darstellung der klassischen Gebiete seiner Wissenschaft braucht, ist ziemlich eng begrenzt; Systeme partieller Differentialgleichungen beherrschen diejenige Periode der Physik, die heute, zur Zeit des anbrechenden Quanten-Säkulums, abgeschlossen hinter uns liegt. Überdies ist es nur eine überraschend kleine Zahl von Differentialgleichun-

gen, die immer wieder vorkommen; es gibt ja z. B. kein Gebiet der Kontinuumsphysik, wo die Poissonsche Gleichung nicht eine Rolle spielt. Diese Tatsache, die dem Anfänger schon auffällt, beruht nicht auf Zufall, sondern auf einem Forschungsprinzip, das aus der Ökonomie des Denkens entspringt. Die von der Mathematik gelieferten Formen sind da, und zwar in relativ geringer Anzahl soweit durchgebildet, daß der Physiker damit etwas anfangen kann. Daher wird er sein empirisches Material und die daraus gewonnenen Gesetze solange umformen und umkneten, bis sie in eine der vorbereiteten Formen passen. Erst dann gilt in der klassischen Physik die logische Durcharbeitung eines Gebietes für abgeschlossen, wenn es auf ein Kapitel der „normalen" Mathematik zurückgeführt ist.

Nur eine auffällige Ausnahme gibt es: Die klassische Thermodynamik.

Die Methoden, die in dieser Disziplin zur Ableitung der Grundsätze gewöhnlich angewandt werden, weichen durchaus von den sonst üblichen Wegen ab. Man sieht das schon daraus, daß es kein anderes Gebiet der Physik gibt, wo Überlegungen und Schlüsse angewandt werden, die mit dem Carnotschen Kreisprozesse u. dergl. irgendeine Ähnlichkeit haben. Fragt man weiter, welche Formen und Sätze der Mathematik es eigentlich sind, die bei den thermodynamischen Schlußweisen gebraucht werden, so wird man diese schwer als solche kennzeichnen können; sie sind eben der physikalischen Lehre, deren Darstellung sie dienen sollen, so spezifisch eigentümlich, daß nach Abzug des physikalischen Inhalts nichts übrig zu bleiben scheint. Und doch kann das nicht der Fall sein; denn die Thermodynamik gipfelt in einer typisch mathematischen Behauptung, nämlich der Existenz einer gewissen Funktion der Zustandsparameter, der Entropie, und gibt Vorschriften zur Berechnung derselben. Man wird zugeben müssen, daß die Thermodynamik in ihrer traditionellen Form das logische Ideal der Scheidung des physikalischen Inhalts von der mathematischen Darstellung noch nicht verwirklicht hat.

Dabei ist im Jahre 1909 eine Abhandlung von C. Carathéodory[1]) erschienen, die jenes Ziel vollständig erreicht. Diese Arbeit ist in der physikalischen Welt fast gar nicht beachtet worden. Das liegt zum Teil an der sehr abstrakten und auf größte Allgemeinheit abzielenden Darstellungsweise, zum Teil an dem Erscheinungsort; die meisten Physiker werden einer in den Mathematischen Annalen veröffentlichten Abhandlung über Thermodynamik, in der nicht einmal Kreisprozesse vorkommen, keine Beachtung schenken. Und doch verdiente sie es, gelesen zu werden, nicht nur zur Klärung der Grundbegriffe, sondern auch wegen der Vorteile, die die neue Darstellung für den Unterricht bietet.

Um das Studium dieser Abhandlung von Carathéodory zu erleichtern, habe ich hier den Versuch gemacht, ihre Grundgedanken in ganz einfacher Weise darzustellen und den Fachgenossen vorzulegen. Ich weiß, daß die Thermodynamik in der durch die großen Meister geschaffenen Gestalt einen starken intellektuellen Reiz ausübt und sehr fest im Bewußtsein der Physiker verankert ist. Vielleicht gewinnt trotzdem die neue Begründung Freunde; fehlen ihr auch jene wunderbaren Einfälle, die auf fast zauberhafte Weise von einfachen Erfahrungstatsachen zu den Hauptsätzen führen, so ist sie dafür durchsichtiger und bedient sich eben „normaler" Mathematik, die jeder gelernt hat.

Ich werde im folgenden die Gedankenkette, die von den Erfahrungstatsachen zu den mathematischen Formeln der Hauptsätze führt, lückenlos mitteilen; dabei werde ich aber die Glieder, die mit der gewöhnlichen Darstellungsweise übereinstimmen, ganz kurz behandeln und nur solche Punkte ausführlicher beleuchten, bei denen neue Wendungen erscheinen. Hier muß auch eine gewisse Kritik des klassischen Beweisganges einsetzen; diese soll aber keineswegs eine Herabsetzung der großartigen Leistungen der Meister bedeuten, deren Intuition den Weg gewiesen hat, sondern nur Schutt wegräumen, den allzu pietätvolle Tradition bisher nicht zu entfernen wagte.

§ 1. Definitionen.

Wir wollen unsere Betrachtungen auf die allereinfachsten Systeme beschränken, nämlich solche, die aus chemisch unveränderlichen Gasen und Flüssigkeiten zusammengesetzt sind. Unsere Methode überträgt sich aber ohne jede Schwierigkeit auf ganz beliebige Systeme, wie sie die Thermodynamik zu betrachten pflegt; wir werden am Schlusse kurz darauf zurückkommen.

Wir setzen die mechanischen Grundbegriffe (wie Volumen, Masse, Kraft, Druck usw.) als bekannt voraus, nicht aber die thermischen (wie Temperatur, Wärmemenge usw.), die streng zu definieren unser Ziel ist.

1) C. Carathéodory, Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik. Math. Ann. 67, 355, 1909.

Bei rein mechanischer Betrachtungsweise ist der innere Zustand einer Flüssigkeit von gegebener Masse bestimmt, sobald ihr Volumen bekannt ist; der Druck ist dann eine Funktion des Volumens. Tatsächlich ist letzteres aber nicht der Fall; man kann bei konstantem Volumen den Druck ändern, und umgekehrt, nämlich durch jene Prozesse, die man Erwärmung oder Abkühlung nennt und die von den Empfindungen des Heißer- oder Kälterseins begleitet werden. Die thermodynamische Betrachtungsweise besteht nun darin, neben dem Volumen V den Druck p als unabhängig veränderlich einzuführen. Wir nehmen an, daß durch Angabe von V, p der innere Zustand des Körpers (Flüssigkeit) vollkommen bestimmt sei.

Die einzelnen Körper dieser Art sollen nach außen und voneinander durch „Wände" getrennt sein, die wir nicht zu den betrachteten Körpern zählen, sondern über deren physikalisches Verhalten wir besondere, idealisierende Annahmen machen. Und zwar betrachten wir hier nur zwei Arten von Wänden, die das Gemeinsame haben, für Substanz undurchlässig zu sein; bekanntlich spielen in der theoretischen Thermochemie auch substanzdurchlässige Wände eine große Rolle, doch bringt deren Zulassung keinerlei neue, prinzipielle Schwierigkeiten mit sich und wird von uns nur in dem Schlußabsatz kurz gestreift. Wir beschränken uns hier also auf die für Wärme undurchlässigen (adiabatischen) und die für Wärme durchlässigen (diathermanen) Wände; aber da wir den Begriff Wärme nicht eingeführt haben, müssen wir auch die Definitionen der Wände so fassen, daß dieser Begriff nicht vorkommt.

Die adiabatische Wand soll durch folgende Eigenschaft definiert sein: Wenn ein Körper in einer adiabatischen Hülle im Gleichgewicht ist, so soll dieses bei Ausschluß von Fernkräften nur durch Bewegung von Teilen der Wand, aber durch keine anderen äußeren Vorgänge gestört werden können.

Unter Vorwegnahme der thermischen Begriffe heißt das eben, daß eine solche Wand Gleichgewichtsänderungen durch Erwärmung nicht zuläßt, sondern nur durch Aufwendung mechanischer Arbeit, die bei Ausschluß von räumlich verteilten Fernkräften nur durch Bewegung von Teilen der Wand (Umrühren, Kompression u. dergl.) geleistet werden kann. Dieser Begriff der adiabatischen Hülle ist für die Theorie nicht zu entbehren und wird in der gewöhnlichen Thermodynamik in derselben Weise verwandt; aber auch praktisch ist seine möglichst vollkommene Verwirklichung im „Kalorimeter" die Voraussetzung jeder thermodynamischen Messung.

Die diathermane Wand wird durch folgende Eigenschaft definiert: Wenn zwei Körper, die sonst adiabatisch umhüllt sind, durch eine diathermane Wand voneinander getrennt sind, so sollen sie nicht bei beliebigen Werten ihrer Zustandsparameter p_1 V_1 und p_2 V_2 im Gleichgewichte sein können, sondern damit das der Fall ist, muß eine bestimmte Relation zwischen diesen 4 Größen bestehen:

$$F_{\cdot}(p_1, V_1, p_2, V_2) = 0. \qquad (1)$$

Eine solche Gleichung ist also der Ausdruck der thermischen Berührung; die Wand führen wir nur ein, um Massenaustausch auszuschließen. Wände, bei denen solcher möglich ist (semipermeable Wände) müssen in ganz analoger Weise definiert werden, wie wir im Schlußabsatz andeuten werden.

§ 2. Empirische Temperatur.

Dem Temperaturbegriff liegt der Erfahrungssatz zugrunde, daß, wenn zwei Körper mit einem dritten im thermischen Gleichgewichte sind, sie auch untereinander im thermischen Gleichgewichte sind. Benützt man die Formel (1) als Ausdruck der thermischen Berührung, so lautet dieser Satz offenbar so:

Aus dem Bestehen der Gleichungen $F_1(p_2, V_2, p_3, V_3) = 0$, $F_2(p_1, V_1, p_3, V_3) = 0$ folgt das Bestehen der Gleichung

$$F_3(p_1, V_1, p_2, V_2) = 0;$$

oder allgemeiner: Aus der Gültigkeit je zweier dieser Relationen folgt die der dritten.

Das ist aber nur dann möglich, wenn diese 3 Gleichungen den folgenden äquivalent sind:

$$f_1(p_1, V_1) = f_2(p_2, V_2) = f_3(p_3, V_3).$$

Man kann also die Gleichgewichtsbedingung (1) zwischen zwei Körpern immer in der Form

$$f_1(p_1, V_1) = f_2(p_2, V_2) \qquad (2)$$

schreiben.

Den einen der beiden Körper kann man nun als Thermometer benützen und den Wert der Funktion

$$f_2(p_2, V_2) = \vartheta$$

als (empirische) Temperatur einführen; dann besagt die Gleichgewichtsbedingung in der Form (2), daß der erste Körper mit dem zweiten, dem Thermometer, im Gleichgewicht ist, wenn eine bestimmte Beziehung

$$f_1(p_1, V_1) = \vartheta \qquad (3)$$

zwischen den Zustandsparametern p_1, V_1 und der empirischen Temperatur ϑ besteht. Diese Beziehung heißt die Zustandsgleichung des Körpers. Die zugehörigen Kurven der

pV-Ebene heißen die Isothermen. Jede beliebige Funktion von ϑ kann mit gleichem Rechte als empirische Temperatur gewählt werden; die Isothermen bleiben dabei immer dieselben. Beschränkt ist die Auswahl nur durch praktische Gesichtspunkte. Man wird nämlich nur solche Körper als thermometrische Substanzen wählen, bei denen je zwei verschiedene Zustände nicht im thermischen Gleichgewichte sind (also Flüssigkeiten nur im Bereiche des tropfbaren oder nur in dem des gasförmigen Zustandes), weil sonst die Eindeutigkeit der Thermometerangaben gefährdet wird.

Aber es ist durchaus notwendig, die außerordentliche Willkür bei der Wahl bestimmter Temperaturskalen zu betonen. Die Bevorzugung der Gasthermometer läßt sich dadurch rechtfertigen, daß erfahrungsgemäß ihre Angaben unabhängig von der Wahl des Gases in beträchtlichem Umfange übereinstimmen; das beruht darauf, daß bei allen Gasen im Zustande hoher Verdünnung die Isothermen durch die Hyperbeln $pV = \text{konst.}$ dargestellt werden. Daß man aber gerade dieses Produkt $pV = \vartheta$ als Gastemperatur wählt, und nicht irgendeine andere Funktion davon, etwa $(pV)^2 = \vartheta$ oder $\sqrt{pV} = \vartheta$, läßt sich bei diesem Standpunkte der Theorie logisch nicht begründen, höchstens durch das zweifelhafte Argument der „Einfachheit" oder durch Vorwegnahme späterer Resultate der Thermodynamik (vergl. § 8).

Ist die Temperaturskala festgelegt, so kann man statt p, V auch p, ϑ oder V, ϑ als Zustandsvariable benützen.

§ 3. Der erste Hauptsatz.

Man pflegt nun den Begriff der Wärmemenge zu definieren und glaubt damit der historischen Entwicklung der thermodynamischen Begriffe gerecht zu sein. Dann muß man aber konsequenterweise die Wärme als Substanz einführen, die vom wärmeren nach dem kälteren Körper strömt, was doch die Auffassung bis zu Mayers Entdeckung der Verwandelbarkeit der Wärme in andere Energieformen war. Mit dieser Entdeckung aber hört die substantielle Auffassung der Wärme auf; sobald man erkannt hat, daß Körper erwärmt werden können, ohne daß die umgebenden Körper ihnen Wärme abgeben, nämlich etwa durch Aufwendung mechanischer Arbeit, verliert der Begriff der Wärmemenge zweifellos seinen Inhalt. Erst muß das Gesetz dieser Verwandelbarkeit bekannt sein, bevor man wissen kann, unter welchen speziellen Vorsichtsmaßregeln die Warmheit durch eine Quantitätsgröße „Wärmemenge" gemessen werden darf.

Wir werden daher den Begriff der Wärmemenge zunächst nicht einführen und ihn erst nachträglich an die im ersten Hauptsatze formulierten Erfahrungen anschließen. Damit gewinnen wir nicht nur größere logische Klarheit, sondern knüpfen auch ganz unmittelbar an die Experimente an, durch die Joule den ersten Hauptsatz bewiesen hat.

Die Experimente bestehen darin, daß ein adiabatisch eingeschlossener Körper (Wasser) durch Aufwendung mechanischer oder elektrischer Arbeit aus einem Zustande 1 in einen Zustand 2 gebracht und bewiesen wird, daß es dazu bei fest gegebenem Anfangs- und Endzustand immer derselben Arbeit bedarf, ganz gleich, in welcher Form, in welcher Art und Weise diese aufgewandt wird. Das ist der eigentliche Inhalt des ersten Hauptsatzes. Nebensache ist, daß die Zustandsänderung des Körpers durch die Temperaturänderung nach einer empirischen Skala gemessen und schließlich in die historisch überlieferten Wärmeeinheiten umgerechnet wird; es wird dabei angenommen, daß die zweite Zustandsgröße, das Volumen, praktisch konstant bleibt (keine merkliche Ausdehnungsarbeit geleistet wird). Wenn wir also alles begrifflich Überflüssige fortlassen, so können wir das Resultat der Jouleschen Versuche so formulieren:

1. Hauptsatz: Um einen Körper (oder ein System von Körpern) von einem bestimmten Anfangszustande zu einem bestimmten Endzustande auf adiabatische Weise zu bringen, ist immer ein und dieselbe mechanische Arbeit (bzw. äquivalente elektrische Energie) notwendig, unabhängig von der Art des Überganges.

Zur vollständigen Charakterisierung einer solchen adiabatischen Zustandsänderung dienen daher folgende Daten: 1. Die Gleichgewichtsparameter des Anfangszustandes (bei einem Körper p_0, V_0); 2. die des Endzustandes (p, V); 3. die aufgewandte Arbeit A. Hält man den Anfangszustand fest, so ist demnach die Arbeit A nur noch von den Parameterwerten des Endzustandes abhängig; man schreibt

$$A = U - U_0. \tag{4}$$

wo U eine Funktion des Zustandes (also im Falle eines Körpers von p, V) und U_0 ihr Wert im Anfangszustande ist. U heißt die Energie des Systems.

Der Unterschied zwischen dieser Art der Einführung der Energiefunktion und der gewöhnlichen ist also der, daß hier nur adiabatische Prozesse benutzt werden, während man sonst U als Summe von zugeführter Arbeit und Wärme bei beliebigen Prozessen definiert. Letztere Definition geht aber über das hinaus, was die unmittelbare, experimentelle Erfahrung gibt, und benutzt überdies den Begriff der Wärmemenge, dem der atavistische Charakter einer unzerstörbaren Substanz anhaftet. Überdies verschleiert sie die Tatsache, daß U eine direkt meßbare Größe ist, die durch das Joulesche Experiment unmittelbar als Funktion der Zustandsparameter geliefert wird. In der Tat, wenn der Anfangszustand ein für allemal festgehalten wird, kann man für jeden Zustand, der adiabatisch erreichbar ist, die dazu nötige Arbeit messen, wodurch direkt der Wert von U für den Endzustand gegeben ist. Auf diese Weise kann man prinzipiell auch jeden Zustand erreichen; denn die Beschränkung, die der zweite Hauptsatz für die erreichbaren Zustände statuiert, läßt sich immer durch Vertauschung von Anfangs- und Endzustand beseitigen.

Die messende Thermodynamik verfährt nun tatsächlich genau nach diesem Schema. Das tritt vielleicht am deutlichsten bei den ganz modernen Verfahren von Nernst zur Bestimmung des Energieinhalts (spezifische Wärme) hervor; bei diesen ist der untersuchte Körper selber das „Kalorimeter", d. h. er wird nach Möglichkeit adiabatisch isoliert, und man mißt, welche (elektrische) Arbeit man ihm zuführen muß, um eine bestimmte Zustandsänderung zu erreichen, die durch die Angabe eines Thermoelements und die Annahme $V =$ konst. gekennzeichnet wird.

Erst nach der Aufstellung des ersten Hauptsatzes ist eine vernünftige Einführung des Begriffes Wärmemenge möglich. Die Chemiker bezeichnen die Energie eines Körpers selbst als Wärmeinhalt, die Energieänderung als Wärmetönung; das ist auch ganz berechtigt, insofern sich die mit der Energieänderung verknüpfte Zustandsänderung hauptsächlich in einer Temperaturänderung zeigt. Der Anschluß an den historischen Begriff der Wärmemenge wird erreicht, indem man als kalorische Einheit die Energie benutzt, die zu einer bestimmten Temperaturänderung von 1 g Wasser (bei konstantem Volumen) nötig ist; diese Energie, im mechanischen Maße (erg) ausgedrückt, ist das Wärmeäquivalent. Der 1. Hauptsatz gibt Auskunft darüber, wie weit es möglich ist, mit der Wärme in der traditionellen Weise als Substanz zu operieren, wie es z. B. beim Gebrauche des Wasser-Kalorimeters geschieht; damit die Wärme (ohne Verwandlung) „strömt", muß jede Arbeitsleistung ausgeschlossen werden. So mißt die Energiezunahme des Wassers im Kalorimeter nur dann die Energieabnahme des eingetauchten Körpers, wenn Volumenänderungen (bzw. andere Arbeit leistende Vorgänge) verhindert werden oder von selbst unbeträchtlich sind. So selbstverständlich diese Einschränkung nach der Aufstellung des 1. Hauptsatzes ist, so sinnwidrig ist sie vorher. Jetzt können wir die Wärmemenge auch für ganz beliebige Prozesse definieren; dazu muß angenommen werden, daß die Energie als Funktion des Zustandes bekannt und die bei einem beliebigen Prozeß aufgewandte Arbeit gemessen sei, dann ist die bei dem Prozeß zugeführte Wärme

$$Q = U - U_0 - A \qquad (5)$$

Im folgenden spielt der Begriff der Wärme keine selbständige Rolle; wir gebrauchen ihn durchaus nur als kurze Bezeichnung der Differenz von Energiezunahme und zugeführter Arbeit.

Die Energiefunktion denken wir uns nun für jeden Körper durch „kalorimetrische" Messungen bekannt. Über die Energie von Systemen von Körpern ist folgendes zu sagen: Sind zwei Körper adiabatisch isoliert, so ist nach Definition die Energie des Systems gleich der Summe der Energien der einzelnen Körper:

$$U = U_1 + U_2. \qquad (6)$$

Im allgemeinen ist aber bei Berührung zweier Körper die Energie nicht additiv, doch ist die Abweichung nur der Oberfläche proportional und daher bei größerem Volumen zu vernachlässigen. Indem wir das tun, können wir die Erfahrung konstatieren, daß auch bei thermischer Berührung die Energie sich additiv verhält. Da wir es hier nur mit adiabatischen und diathermanen Wänden zu tun haben, werden wir also stets die Gleichung (6) anwenden können.

§ 4. Quasistatische (reversible) Zustandsänderungen.

Bei der Formulierung des 1. Hauptsatzes wird die mechanische Arbeit als prinzipiell meßbar angesehen. Damit das bei jedem Prozeß, mag er so stürmisch verlaufen wie er wolle, tatsächlich möglich sei, müßte man annehmen, daß die auf die beweglichen Teile der Wände ausgeübten Kräfte in ihren Momentanwerten registrierbar seien; denn die Arbeit berechnet sich als Produkt von Verschiebung und Kraft. Praktisch ist das aber nur in we-

nigen Fällen zu erreichen; denn bei schnellen Bewegungen entstehen im Innern der Flüssigkeit turbulente Strömungen und Wellen, die in gänzlich unkontrollierbarer, regelloser Weise Drucke auf die Wände erzeugen. Um solche Vorgänge auszuschließen, sind in der Hauptsache zwei Verfahren zur meßbaren Zufuhr von Arbeit gebräuchlich:

1. Man benutzt stationäre Vorgänge, z. B. einen mit konstanter Drehungsgeschwindigkeit laufenden Rührer (wie bei einem Joule schen Experiment zur Bestimmung des Wärmeäquivalents); es bildet sich dann eine stationäre Flüssigkeitsströmung aus, wobei der Rührer einen konstanten Widerstand zu überwinden hat. Vernächlässigt man die relativ beliebig kurz zu machenden Zeiten der Beschleunigung zu Anfang und Ende des Versuchs, so ist also die Arbeit als Produkt von Winkelgeschwindigkeit und Drehmoment des Rührers bestimmbar.

Hierher gehört im Prinzip auch die Heizung durch einen stationären, elektrischen Strom.

2. Man leitet den Prozeß unendlich langsam, derart, daß der Zustand in jedem Momente als Gleichgewicht angesehen werden kann. Man sollte solche Vorgänge quasistatische nennen, aber man gebraucht gewöhnlich das Wort reversibel, weil sie im allgemeinen die Eigenschaft haben, umkehrbar zu sein. Wir wollen hier auf die Bedingungen, unter denen das der Fall ist, nicht näher eingehen, sondern annehmen, daß sie erfüllt sind, und werden beide Bezeichnungen als synonym verwenden.

In der gewöhnlichen Thermodynamik läßt man jede Kurve des Zustandsraumes (im Falle einer Flüssigkeit der pV-Ebene) als Bild eines reversibeln Prozesses gelten; dabei ist die Meinung, daß reversible Wärmezufuhr dadurch bewirkt werden kann, daß man den betrachteten Körper der Reihe nach mit großen Wärmereservoiren in thermischen Kontakt bringt, die sich nur um unendlich kleine Temperaturintervalle unterscheiden. Solche Gedankenexperimente sind sicherlich erlaubt; das vorliegende aber entfernt sich allzu weit von den wirklich ausgeführten Experimenten und hat für den mathematisch Geschulten etwas Abstoßendes. Daher ist es sicherlich ein Vorteil, daß es sich ganz vermeiden läßt. Wir können uns durchaus auf adiabatische, quasistatische (reversible) Prozesse beschränken, diese sind tatsächlich ausführbar und werden überall experimentell ausgeführt, denn sie bestehen in hinreichend langsamen Bewegungen der (adiabatischen) Wände. Bei solchen Prozessen läßt sich auch streng zeigen, daß im Limes für unendlich kleine Geschwindigkeiten jeder Zwischenzustand ein Gleichgewichtszustand ist; denn die kinetische Energie verschwindet quadratisch mit den Geschwindigkeiten.

Die bei einer reversibeln infinitesimalen Volumenänderung dV einer Flüssigkeit zugeführte Arbeit ist

$$dA = -p dV, \tag{6}$$

wo p der Gleichgewichtsdruck ist. Der 1. Hauptsatz (5) nimmt daher die Form an:

$$dQ = dU + pdV = 0. \tag{7}$$

Für Systeme von Körpern, die durch adiabatische und diathermane Wände getrennt sind, erhält man die entsprechende Gleichung durch Addition, da sowohl die Energiefunktionen als die Arbeitsleistungen additiv sind; z. B. für 2 Körper:

$$\left.\begin{aligned} dQ &= dQ_1 + dQ_2 \\ &= dU_1 + dU_2 + p_1 dV_1 + p_2 dV_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Endliche quasistatische, adiabatische Zustandsänderungen sind stetige Folgen von Gleichgewichten, also Kurven im Zustandsraume (bei einem Körper Kurven in der pV-Ebene), die in jedem Punkte Bedingungen der Form (7) oder (8) genügen. Diese Kurven heißen Adiabaten.

Die Formeln (7) bzw. (8), die den 1. Hauptsatz ausdrücken, sind Differentialgleichungen für die Adiabaten. Denn drückt man U als Funktion zweier Zustandsparameter, etwa V und ϑ, aus, so wird

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta.$$

Demnach lautet die Gleichung (7):

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial V} + p\right) dV + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta = 0. \tag{7'}$$

Die Gleichung (8) hat nur Interesse für den Fall thermischer Berührung der beiden Körper; dann wird das System durch 3 unabhängige Zustandsparameter charakterisiert, etwa die beiden Volumina V_1, V_2 und die gemeinsame Temperatur ϑ, durch welche sich die Drucke aus den Zustandsgleichungen

$$f_1(p_1, V_1) = f_2(p_2, V_2) = \vartheta$$

ausdrücken lassen. Dann wird die Gleichung (8):

$$\left.\begin{aligned} dQ = \left(\frac{\partial U_1}{\partial V_1} + p_1\right) dV_1 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial V_2} + p_2\right) dV_2 + \\ + \left(\frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial U_2}{\partial \vartheta}\right) d\vartheta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

Solche Gleichungen wie (7') und (8') heißen Pfaffsche Differentialgleichungen; die Adiabaten müssen ihnen genügen.

Es ist unumgänglich notwendig, die Eigenschaften dieser Differentialgleichungen näher zu studieren. Auch in der traditionellen Darstellung der Thermodynamik kommt man darum nicht herum; ist es doch das Ziel des Aufbaues der Thermodynamik, zu zeigen, daß „die absolute Temperatur integrierender Nenner des Differentials der Wärme" ist. Nur wird diese Untersuchung gewöhnlich recht oberflächlich vorgenommen; in manchen Lehrbüchern fehlt überhaupt eine Definition des integrierenden Faktors oder Nenners, geschweige daß die Bedingungen der Existenz eines solchen entwickelt werden. Es soll aber hier nicht unsere Aufgabe sein, an einzelnen Büchern Kritik zu üben, sondern wir wollen zeigen, daß man die Untersuchungen über die Integrabilität Pfaffscher Differentialgleichungen nur einen kleinen Schritt weiter zu treiben braucht, als es in den besseren Darstellungen der klassischen Theorie geschieht, damit einem die fertigen Formeln der Thermodynamik als reife Früchte in den Schoß fallen.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

Arnold Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. Mit 109 Abbildungen. 36 Bogen. 8°. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. Geh. M. 25.—, geb. M. 28.60. Ausschließlich Sortimentszuschlag.

Von Sommerfelds ausgezeichnetem Buche (siehe d. Zeitschr. **21**, 1920) ist innerhalb eines Jahres die zweite Auflage erfolgt. Wenn eine Auflage so schnell vergriffen ist wie die erste des genannten Buches, so spricht das schon genug für sich. — An dem eigentlichen Texte hat Sommerfeld nur kleinere Unebenheiten ausgeglichen und einige Kürzungen vorgenommen. Dagegen hat er für den mathematisch geschulten Physiker die überaus wichtigen Zusätze am Schlusse seines Buches weiter ausgeführt und durchgearbeitet, indem er zunächst die Theorie der Berührungstransformationen und der Winkelkoordinaten entwickelt, auf denen er dann das ertragreiche Bohrsche Korrespondenzprinzip aufbaut. — Neu hinzugekommen sind dann noch: „Bandenspektren und Molekularmodelle", aus der Überlegung heraus, daß die ersteren, wenn sie einmal theoretisch gedeutet sind, eine unzweideutige Probe auf die Richtigkeit unserer Molekularmodelle gestatten müssen, gerade so wie die Linienspektren die Richtigkeit unserer Atommodelle verbürgen. Sodann wird an der Hand einer lehrreichen Figur von Kossel noch klargelegt, wie man sich das Ineinandergreifen vom Atominneren und Atomäußeren, d. h. den stetigen Übergang aus den Röntgenserien in die sichtbaren Spektren zu denken hat, und schließlich wird ein magnetooptischer Zerlegungssatz aufgeführt, der Klarheit in die Dunkelheit der komplizierten Zeemaneffekte und des schwer entwirrbaren Neonspektrums bringen wird. Wir wünschen der zweiten Auflage das gleiche Geschick wie der ersten! Karl Bergwitz.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Wien Dr. Ludwig Moser zum ord. Professor für analytische Chemie an derselben Hochschule, Dr. John E. Schott zum a. o. Professor für Chemie am Pennsylvania State College, George D. Mc. Laughlin zum Direktor des Forschungsinstitutes für Kolloidchemie am College of Engineering der Universität von Cincinnati, der Professsor der reinen und angewandten Mathematik an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Ludwig Bieberbach in gleicher Eigenschaft an der Universität Berlin, der Professor für höhere Mathematik an der Universität Freiburg i. Schw. Dr. Michel Plancherel in gleicher Eigenschaft an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, die wissenschaftlichen Hilfsarbeiter am astronomischen Recheninstitut der Universität Berlin Dr. Gustav Stracke und Dr. Werner Strehlow zu Observatoren an derselben Anstalt, der Konservator der Landeswetterwarte in München Professor Dr. Eugen Alt zum Direktor der Sächsischen Landeswetterwarte (an Stelle des in den Ruhestand getretenen Oberregierungsrats Professor Dr. Paul Schreiber), der Privatdozent für Chemie an der Universität Münster Dr. Ernst Weitz zum Abteilungsvorsteher am chemischen Institut der Universität Halle, der Professor der Chemie B. Mouatt Jones Aberystwyth zum Leiter des Manchester College der Technologie, der ord. Professor an der Universität Greifswald Dr. Felix Hausdorff zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Bonn, E. A. Goodhue vom California Institut für Technologie zum Dozenten für Chemie an der Universität Vermont, Dr. Anton Wisner zum ord. Professor der chemischen Technologie an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn.

Verliehen: Dem Privatdozent der Chemie an der Universität Wien Dr. Alfons Klemenc der Titel Professor.

Gestorben: Der Professor der Chemie am Technischen Institut in Varese (Italien) Ing. Chemiker Ugo Rossi, der frühere ord. Honorarprofessor für Chemie an der Universität Heidelberg Dr. Paul Jannasch, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Jena Geheimer Rat Dr. Johannes Thomae.

Angebote.

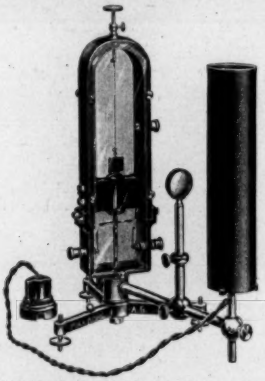
Physiker

für das Laboratorium einer Berliner Fabrik vakuumtechnischer Erzeugnisse **gesucht.** Ausführliche Bewerbungen unter **S. H. 576** an den Verlag der Physikal. Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2 erbeten.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 1600000.



61392. Drehspul-Spiegelgalvanometer.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel

In gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

Optische Anstalt

C. P. Goerz A.-G.

Abt. Scheinwerferbau

Leutzsch bei Leipzig

Projektionsapparate

*

Ablesefernrohre
mit
Autokollimation

Goerz-Bogenlampen

mit **erhöhter** Helligkeit für Projektion, Kinematographie, Mikroskopie, Reproduktions- und Aufnahme-Ateliers, Therapie usw.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. — Zusammenfassende Bearbeitungen.)

	Seite
Atomkernbau und Elemententwicklung. I., v. E. Kohlweiler	243
Bär, R., u. F. Luchsinger, Über die Bestimmung der Dichte und Ladung von Selen-Partikeln	225
Born, M., Kritische Betrachtungen zur traditionellen Darstellung der Thermodynamik. (Fortsetzung.) (Z. B.)	249
Dielektrizitätskonstante: Die — und der Brechungsexponent von Flüssigkeiten. (Vorläufige Mitteilung), v. H. Isnardi. Ergänzt und mitgeteilt von R. Gans	230
Elemententwicklung und Atomkernbau. I., v. E. Kohlweiler	243

(Fortsetzung auf Seite III.)

Großes Werk der Metallindustrie sucht zum sofortigen Eintritt einen

Metallurgen oder Physiker

für selbständige Arbeiten auf dem Gebiete der Eisenlegierungen.

Geeigneter Bewerber wird ersucht, Angebot mit Lebenslauf, Zeugnisabschriften, Lichtbild, Gehaltsansprüchen sowie Angabe des frühesten Eintrittstermins einzureichen unter **J. Z. 22745** an **Rudolf Mosse, Berlin SW. 19.**

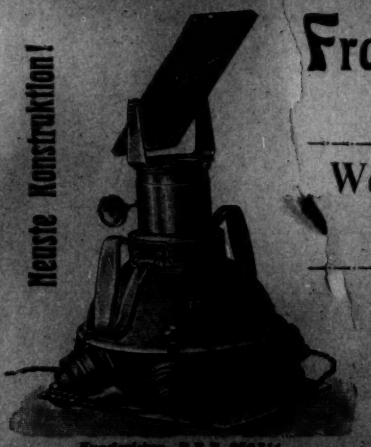
1 Fontaktoskop, 1 Elektroskop mit Kasten, neu, 1 Zambonische Säule, Radioaktive Tonkörper und Gefäße, Chemikalien, Lupen, Patente, 1 Faß radiumhaltige Erde aus Kaukasus, 1 Ausstellungsschrank

aus dem Nachlaß eines Radiumforschers verkäuflich durch

General Karbe, Jena, Kaiser-Wilhelm-Straße 9 III.

Physiker

(möglichst unverheiratet) **gesucht** mit abgeschlossener Hochschulbildung zu Arbeiten in techn. wissenschaftl. Laboratorium (Nähe Frankfurts). Ausführliche Angebote mit Bildungsgang, Gehaltsansprüchen usw. unter **S. H. 577** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2 erbeten.



Neueste Konstruktion!

Kugelspiegel. D.R.P. 260214.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.